

Relativistische Quanten -
mechanik

Georg Wolschin

Institut für Theoretische Physik

Univ. Heidelberg

Relativistische Quantenmechanik

Sommersemester 2012 UHD

Georg Wolzsch

	<u>Seite</u>
1) Einleitung	1
2) Verbindung zw nichtrelativistischen QM	10
3) Klein-Gordon Gleichung	15
4) Dirac - Gleichung	38
5) Invarianzen der Dirac - Gleichung	57
6) Lösung der Dirac - Gleichung mit Zentralspotential	71
7) Das Kleinsche Paradoxon	85
8) Dirac-Neutrinos: Die Weyl-Gleichung	93
9) Grundzüge der Quantenelektrodynamik	102
10) Elemente der relativistischen Streutheorie	120

Literatur

- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistische Quantenmechanik
A. Messiah, Quantenmechanik, Band II, de Gruyter 1990
H. N. Pirkhakeru, Relativistic Quantum Mechanics
Springer 2003 / 2nd ed. 2005
A. Wachen, Relativistische Quantenmechanik,
Springer 2005
C. Itzykson, J.-B. Zuber, Quantum Field Theory,
Mc Graw-Hill, NY 1980
O. Nachtmann, Elementarteilchenphysik, Vieweg,
Braunschweig, 1986
W. Preiser, Relativistic Quantum Mechanics,
Springer, 1991
F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene,
Springer, Heidelberg, 1997

Relativistische Quantenmechanik

1. Einleitung

Nichtrelativistische QM:

beruht auf der Schrödinger-Gleichung (SE):

Ableitung via Korrespondenzprinzip aus dem Hamilton-Formalismus der klass. Mechanik.

- Die SE ist Galilei-invariant (wie die Hamilton-Fkt)
- gültig nur für $v \ll c$

Relativistische QM

- $v \lesssim c$
 - WW von Licht und Materie
 - $E_{\text{WW}} \gtrsim mc^2 \Rightarrow$ Teilchenzeugung
- erfordern Feldquantisierung \Rightarrow "Quantenfeldtheorie"
- } Lorentz-
Invariante Theorie

Relativistische Wellengleichungen

beschreiben Teilchen in einem vorgegebenen Kraftfeld - insbes. dem elektromagnetischen Feld -, das zunächst noch nicht quantisiert wird.

Die Wellengleichung soll dem Korrespondenzprinzip* genügen, und für Teilchen mit Spin in nichtrelativistischer Näherung die Pauli-Gleichung ergeben.

(* klassische Größen werden durch Operatoren ersetzt)

Hirtwisch war die erste relativistische Wellengleichung die "Klein-Paradon-Gleichung" (KGE)

E. Schrödinger, *Annalen Phys.* 81, 109 (1926)

W. Parolon, *Z. Physik* 40, 117 (1926)

O. Klein, *Z. Physik* 41, 407 (1927).

Sie beschreibt Mesonen mit Spin 0, z.B. Pionen. Wegen negativer Wahrscheinlichkeitsdichten (s. Kap. 3!) wurde sie zunächst verworfen und erst später als Grundlage von Feldtheorien für skalare Mesonfelder etabliert.

Erst die von Paul Dirac aufgestellte Gleichung beschreibt Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ (Fermionen, spez. die Elektronen):

P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* A117, 610 (1928). (DE)

Wie die KGE hat die DE Lösungen mit negativer Energie.

Dirac hat deshalb 1930 postuliert, dass diese Zustände alle besetzt sind, so dass für Fermionen (Pauli-Prinzip!) keine Übergänge möglich sind.

"Löcher" in diesem "Dirac-See" entsprechen Antiteilchen mit entgegengesetzter Ladung:

P.A.M. Dirac, "A theory of electrons and protons",
Proc. Roy. Soc. A126, 360 (1930);

[zunächst hielt man das Proton für das Antiteilchen des Elektrons:

Dirac versuchte zunächst, die Massendifferenz e/p auf die Wechselwirkung mit dem See zurückzuführen].
 H. Weyl zeigte jedoch, dass die Diractheorie vollständig symmetrisch für neg./pos. Ladungen ist; Dirac modifizierte daraufhin seine Theorie und publizierte 1931 das Positron
 [P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A133, 60-72 (1931)].

Es wurde 1932 von Carl Anderson entdeckt und beseitigte die Zweifel an der Dirac-Theorie:

C.D. Anderson, Science 76, 238-239 (1932).

In der Relativistischen Quantenmechanik bleiben die Axiome der Quantentheorie ungländert; es wird jedoch der Hamilton-Operator modifiziert:

- Der Zustand eines Systems wird durch einen Zustandsvektor in einem linearen Raum - dem Hilbertraum - beschrieben, $|\psi\rangle$
- Observablen werden durch hermitesche Operatoren dargestellt
- Der Mittelwert einer Observablen im Zustand $|\psi\rangle$ beschrieben, $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ ("Erwartungswert")
- Bei einer Messung von A geht der ursprüngliche Zustand in den Eigenzustand $|u\rangle$ von A mit Eigenwert a_u über, $A|u\rangle = a_u|u\rangle$

Es folgt eine Einführung in die verwendete Notation, dann untersuchen wir die Eigenschaften der Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung mit der Interpretation als Einteilchen-Wellengleichung. Die Lösungen sind auch Basiszustände bei der Entwicklung der Feldoperatoren.

Notation: Einheiten

Die Grundgleichungen werden mit \hbar, c eingeführt, später setzen wir

$\hbar \equiv c \equiv 1$, so dass die Zeit die Dimension einer Länge hat, Energien, Impulse und Massen die Dimension einer inversen Länge; Ladungen werden

dimensionslos ($e^2 = \frac{e^2}{\hbar c} \approx 1/137$) [1/137.035999679(94)]
 für $Q = 0$; bei $Q = m v^2$; $\alpha \approx 1/128$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 6.582 \cdot 10^{-22} \text{ eVs}$$

Koordinaten: Zeitpunkt t und ein Punkt im

Ortsraum $\vec{x} = (x, y, z)$ definieren einen

Raum-Zeit-Punkt

(x^0, x^1, x^2, x^3) mit $x^0 = ct$ Zeitkoordinate
 $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ Raumkoord.

Die Indizes 0, 1, 2, 3 kennzeichnen Komponenten von Viervektoren, (griech. Buchstaben μ, ν, \dots), 1, 2, 3 die Komponenten des gewöhnlichen Raumes, (lat. Buchstaben i, k, \dots):

$$x^\mu \equiv (x^0, x^k) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$(\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (k = 1, 2, 3)$$

Metrischer Tensor, ko- und kontravariante Indizes

Die Metrik des Raum-Zeit-Kontinuums ist durch den metrischen Tensor definiert

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{kk} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu \neq \nu$$

Man unterscheidet sog.

"kovariante" Vektoren: transformieren wie $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (a_μ)

"kontravariante" " : " " " x^μ (a^μ)

⇒ unterschiedliche Vorzeichen der räumlichen Komponenten
Umwandlung durch Anwendung des
metrischen Tensors:

$$a_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} a^\nu, \text{ so dass}$$

$$a_0 = a^0, \quad a_k = -a^k$$

Einstellige Summenkonvention:

Über doppelt erscheinende Indizes wird summiert:

$$\Rightarrow a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$\Rightarrow \text{Hinaufziehen der Indizes: } a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

mit $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$

Es ist $g^\mu_\nu \equiv g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$

mit dem Kronecker-Symbol $\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$

Dreis- und Viervektoren, Skalarprodukt

Für Dreivektoren im gewöhnlichen Ortsraum
benutzen wir $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, so dass

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a}) \text{ mit } a^1 = a_x, a^2 = a_y, a^3 = a_z$$

Skalarprodukt / Betrag 3er Vektor: $a = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2} = [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2]^{1/2}$

Oft wird beim 4er Vektor der Index μ weggelassen (a)
wenn eine Verwechslung mit dem Betrag des 3er Vektors aus-

Das Skalarprodukt zweier 4er Vektoren a^μ, b^μ erhält man durch "Verjüngung" aus den jeweiligen ko- und kontravarianten Komponenten;

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$s^2 \equiv a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - a^2$ ist die Norm von $a \equiv a^\mu$.

Klassifizierung der 4er Vektoren

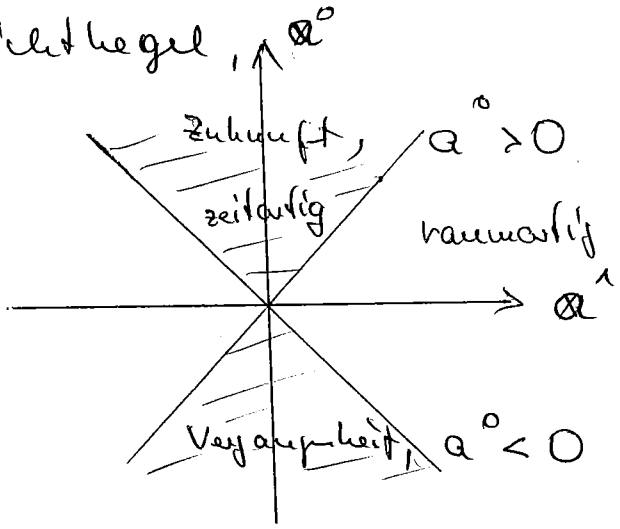
Je nach Vorzeichen ihrer Norm gibt es drei Arten von 4er Vektoren:

$a_\mu a^\mu < 0$, a^μ raumartig

$a_\mu a^\mu = 0$, a^μ Nullvektor

$a_\mu a^\mu > 0$, a^μ zeitartig

Dies entspricht der Lage des Vektors relativ zum Lichtkegel,



Gradient, Differentialoperatoren

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{Nabla-Operator}$$

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Die vier partiellen Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ bilden einen kovarianten Vektor:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \vec{\nabla} \right) \quad \text{Gradientenoperator} \end{aligned}$$

Der entsprechende kontravariante Gradient ist

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla} \right)$$

Der d'Alembert-Operator ist

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu$$

$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ -Tensor (Levi-Civita Tensor)

ein in den vier Indices total antisymmetrischer Tensor:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1 & , (\mu\nu\lambda\rho) \text{ gerade Permutation v. } (0,1,2,3) \\ 0 & , \text{ mind. zwei gleiche Indices} \\ -1 & , (\mu\nu\lambda\rho) \text{ ungerade Permutation v. } (0,1,2,3) \end{cases}$$

Elektromagnetisches Feld

Das EM Potential besteht aus einem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$, und einem skalaren Potential $\phi(\vec{r}, t)$, die einen Viervektor bilden:

$$(A^\mu) \equiv (\phi, \vec{A}) ; (j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \text{ mit } \partial_\mu j^\mu = 0$$

Elektrisches Feld : $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^0}$

Magnetisches Feld : $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Die Komponenten von \vec{E} und \vec{H} bilden einen antisymmetrischen Tensor $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

Raum-Zeit-Kontinuum :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \text{ , so dass (im Vakuum)}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} ; \text{Sp}(F^{\mu\nu}) = 0$$

⇒ Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu ; \text{ in Lorenz-Eichung } \partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Homogene MWG:

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0 \text{ mit } \hat{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$

Lorentz-Transformation (LT)

Beim Wechsel des Bezugssystems durch LT werden die Koordinaten linear und reell so transformiert, dass das Quadrat des Abstandes zweier Raum-Zeit-Punkte erhalten bleibt:

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}}$$

Der reelle Vektor a^{μ} ist eine einfache Translation der Raum-Zeit Achsen. Homogene LT mit $a^{\mu} = 0$:

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}}$$

Definition der LT durch $(\Lambda^{\mu\lambda} = g^{\lambda\sigma} \Lambda^{\mu}_{\sigma})$

(1) $\Lambda_{\mu\nu}^* = \Lambda_{\mu\nu}$ reelle Transformation

(2) $\Lambda_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\lambda} = \Lambda_{\nu\mu} \Lambda^{\lambda\mu} = \delta_{\nu}^{\lambda}$ Erhaltung des Abstandsquadrates

$\Rightarrow \det |\Lambda^{\mu}_{\nu}| = \pm 1$ (+1: "richtige" LT; Richtungsinn der Raumachsen bleibt gleich)

Inverse Transformation:

$$\boxed{x^{\mu} = x'^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\mu}}$$

Die (homogene) Lorentz-Gruppe ist die Gruppe der linearen reellen Transformationen, bei denen die Skalarprodukte zwischen Vektorvektoren erhalten bleiben.

2. Verbindung zw nichtrelativistischen QM

In der nichtrel. QM wird die Zeitentwicklung von Zuständen $|\psi\rangle$ durch die Schrödinger-Gleichung bestimmt (SE):

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle} \quad (SE)$$

Für ein freies Teilchen in Ortsdarstellung, $\langle \vec{r} |$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 \psi(\vec{r}, t).$$

- (1) Wegen der unterschiedlichen Ordnungen der zeitlichen und räumlichen Ableitungen ist die SE nicht Lorentz-kovariant ($\hat{=}$ relativistische Invarianz gegenüber LT): ihre Struktur ändert sich beim Übergang von einem Inertialsystem durch LT in ein anderes.
- (2) Die SE beschreibt nicht den Eigen Drehimpuls eines Teilchens, z.B. den Spin der Elektronen. Für nichtrelativistische Elektronen lässt sich dieser Mangel durch das "Rezept" von W. Pauli beheben: Z. Physik 43, 601 (1927): Die Wellenfunktion ψ wird durch eine zweikomponentige Wellenfunktion ersetzt,

$$\psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

mit $|\psi_i(\vec{r}, t)|^2 d^3r$, $i=1,2$: Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit Spin in positiver ($i=1$) oder negativer ($i=2$) z-Richtung im Volumenelement d^3r um den Punkt \vec{r} zu finden.

Der Drehimpulsoperator \vec{J} setzt sich aus den Operatoren \vec{L} des Bahndrehimpulses, und $\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ des Spins zusammen:

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix}$$

Gesamtdrehimpuls-Operator

$\vec{L} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ Bahndrehimpuls-Operator
 mit den Paulischen Spinmatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die so modifizierte Schrödinger-Theorie ist jedoch nicht relativistisch invariant.

Ziel ist deshalb, eine rel. invariante Gleichung zu finden, die den Spin "automatisch" mit berücksichtigt.

Zum Aufstellen von -relativistischen oder nicht-relativistischen - Wellengleichungen benutzt man das Korrespondenzprinzip, d.h.

klassische Größen werden durch Operatoren ersetzt:

$$\left[\begin{array}{l} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} = -i\hbar \vec{\nabla} \end{array} \right]$$

Damit ergibt sich aus der nichtrelativistischen Energie eines freien Teilchens

$$\left[E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \right]$$

die freie zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = - \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} |\psi\rangle.$$

In der speziellen Relativitätstheorie transformieren sich Energie E und Impuls $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ als

Komponenten eines kovarianten Vierervektors

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

mit den kovarianten Komponenten

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right)$$

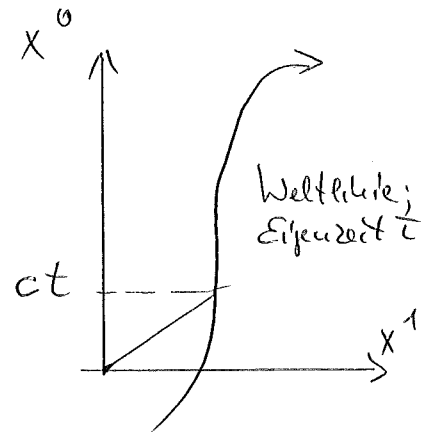
[ist das invariante Skalarprodukt (s.S. 14)

$$\left[p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2, \text{ mit der Ruhemasse } m. \right]$$

Ableitung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

RQM 13

"Weltlinie" eines Teilchens in Parameterdarstellung: Ort eines klassischen relativistischen Punktteilchens der Masse $m > 0$ im Minkowski-Raum



$$X(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}$$

mit der Zeit t im Inertialsystem,

Eigenzeit τ als Parameter auf der Weltlinie: die Zeit, die eine mit dem Teilchen bewegte Uhr anzeigt.

Im momentanen Ruhesystem des Teilchens gilt für das Differential der Weltlinie

$$dx' = \begin{pmatrix} cd\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Invarianz des relativistischen Abstandsquadrats ist

$$\begin{aligned} (dx')^2 &= c^2 d\tau^2 = (dx)^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2 \\ &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$$

Der Zusammenhang zwischen τ und t wird

$$\tau = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} \quad ; \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4er Geschwindigkeit u und 4er Impuls p sind definiert durch

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} c \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{v}}{c} \end{pmatrix} \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{v}}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ gehen diese Ausdrücke in die gewöhnlichen Formeln für Energie und Impuls über - jedoch muss die Ruheenergie berücksichtigt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v \ll c} 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{E}{c} \rightarrow mc + \frac{1}{2} mc \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{E \rightarrow mc^2 + \frac{1}{2} mv^2}$$

$$\vec{p} \rightarrow mv$$

Das invariante Skalarprodukt für den 4er Impuls ergibt demnach

$$\boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2} \quad , \text{ v. S. 12.}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

3. Klein-Gordon-Gleichung

Wenden wir das Korrespondenzprinzip

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}, \quad p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu$$

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

auf die relativistische Energie-Impuls-Beziehung an,

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4},$$

erhalten wir die Wellengleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4} |\psi\rangle$$

Die Wurzel birgt jedoch Probleme: ihre Entwicklung ergibt es hohe Ableitungen, Ort und Zeit treten also unsymmetrisch auf und die relativistische Invarianz wird gebrochen.

Wir gehen deshalb von der quadratischen Relation aus,

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

und erhalten

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\psi\rangle = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4) |\psi\rangle$$

mit jeweils 2. Ableitung in Ort und Zeit.

Division durch $-\hbar^2 c^2$ ergibt die offensichtlich lorentz-kovariante Form

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] |\psi\rangle = 0$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad x^\mu = (x^0 = ct, \vec{x})$$

denn aus der Elektrodynamik ist bekannt,
dass der d'Alembertoperator

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

invariant gegenüber LT ist.

In der Wellengleichung erscheint die reduzierte
Compton-Wellenlänge des Teilchens mit Masse m ,

$$\frac{\hbar}{mc} \equiv \lambda_c \quad \left[\lambda_c^e \approx 3.86 \cdot 10^{-13} \text{ m} \right]$$

benannt die von Schrödinger, Pauli und Heisenberg
aufgestellte Gleichung

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] |\psi\rangle = 0$$

freie Klein-Gordon-
Gleichung, KGE

E. Schrödinger hat sie 1926 als relativist. Verallgemeinerung
der SE 1926 von Schrödinger, O. Heisenberg und W. Pauli
haben sie im Detail untersucht.

Mit dem 4er Impuls als Operator $p^\mu \hat{=} i\hbar \partial^\mu$
lässt sie sich auch schreiben als

$$\left[p_\mu p^\mu - m^2 c^2 \right] |\psi\rangle = 0$$

3.1 Eigenschaften der LGE

sie erfüllt die Kontinuitätsgleichung;

Zur Herleitung aus der LGE bildet man

$$\psi^* \left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0$$

und subtrahiert die komplex konjugierte Gleichung,

$$\psi \left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0$$

\Rightarrow

$$\psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = 0$$

$$\partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) = 0$$

Damit die Stromdichte des nichtrelativistischen entspricht, multiplizieren wir mit $\frac{\hbar}{2mi}$, $\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] = 0$$

Dies hat die Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\dot{\rho}_s + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = 0}$$

mit der Dichte

$$\rho_s = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right], \text{ und der Stromdichte}$$

$$\vec{j}_s = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right].$$

bzw. in kovarianter Notation mit $j^\mu \equiv (c\rho_s, \vec{j})$:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

4er Stromdichte

In relativistischer Formulierung ist die
Normierung meist so gewählt, dass

$$\int_{kg}^{\mu} \equiv -i\hbar c^2 (\psi^* \partial^{\mu} \psi - \psi \partial^{\mu} \psi^*), \quad \rho_{kg} = i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

so dass der Energie-Eigenzustand

$$\psi = \bar{\psi}(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} \Rightarrow \boxed{\rho_{kg} = 2E |\bar{\psi}|^2,}$$

und $|\bar{\psi}| = 1$ entspricht $2E$ Teilchen pro
 Einheitsvolumen

Die Verbindung zum "Schwärdinger-Strom" ist dann

$$\vec{j}_s = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) = \frac{1}{2mc^2} \vec{j}_{kg}$$

und \vec{j}_s hat $E/(mc^2)$ Teilchen pro Einheitsvolumen für $|\bar{\psi}| = 1$.

Als Folge der 2. Zeitableitung in der KG E ist jedoch ρ nicht positiv definit, und daher keine Wahrscheinlichkeitsdichte, sondern evtl. $e \cdot \rho(\vec{x}, t)$ eine Ladungsdichte.

(Bei einer DGL 2. Ordnung wie der KG E können die Anfangswerte von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ unabhängig voneinander vorgegeben werden, so dass $\rho(\vec{x})$ positiv oder negativ sein kann).

Freie Lösungen der KG E

∃ zwei freie Lösungen in Form von ebenen Wellen:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) / \hbar}$$

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

(Reifen durch Einsetzen)

Es treten positive und negative Energien auf, die Energie ist nicht nach unten beschränkt. Die Theorie ist skalar, sie enthält keinen Spin und könnte

nur Spin 0 Mesonen (z.B. π^0) beschreiben.

Als Quantenfeldtheorie beschreibt die KG E Mesonen; das hermitesche skalare Klein-Pauli-Feld beschreibt neutrale Mesonen mit Spin 0, das nichthermitesche pseudoskalare Feld geladene Mesonen und ihre Antiteilchen mit Spin 0, siehe QFT-Vorlesung.

Im Rahmen der RQM lässt sich das LGE-

Problem negativer Energien ($\hat{=}$ Massen im feldfreien Fall) umgehen, indem man eine Interpretation des 4er Vektors j^μ ändert:

$j^\mu \rightarrow e j^\mu(x) \equiv$ Stromdichte-Vierervektor, d.h. insbesondere
 $\rho \rightarrow e \rho(x) \equiv$ elektrische Ladungsdichte; nicht positiv definit

Die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

beschreibt dann die Ladungserhaltung, während die Teilchenzahl nicht erhalten ist.

[W. Pauli, V. Weisskopf, Helv. Phys. Acta 7, 709 (1934)].

\Rightarrow es können Teilchenpaare mit entgegengesetzter Ladung erzeugt und vernichtet werden, bei dieser Interpretation ist die LGE keine Eineteilchen-Theorie mehr, sondern eine "Theorie der Ladung".

(Erst mit der Dirac-Theorie kann eine positiv definite Dichte für ein Teilchen eingeführt werden; auch dort bleiben jedoch negative Energien, so dass die Eineteilchen-Interpretation nur beschränkt möglich ist).

3.2 Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern:

Eichinvarianz

Die HW eines relativistischen Spin-0-Teilchens mit einem elektromagnetischen Feld wird in der LGE wie in der SE durch "minimale Kopplung" berücksichtigt:

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \\ \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} &\rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \end{aligned} \right\} p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

mit der Ladung e des betrachteten Teilchens, und dem elektromagnetischen Viererpotential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad A^0 = e\phi$$

Damit wird die LGE mit em. Feld:

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right)^2 - c^2 \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m^2 c^4 \right] |\psi\rangle = 0$$

bzw. in kovarianter Form (Massesterm $m^2 c^2$!)

$$\boxed{\left[\left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) - m^2 c^2 \right] |\psi\rangle = 0.}$$

Die Maxwell'schen Gleichungen sind invariant unter lokalen Eichtransformationen der Art

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

bzw.

$$\boxed{A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi}$$

mit $\chi = \chi(x)$ eine beliebige reelle skalare Funktion der Raumzeit-Koordinaten.

Diese lokale Eichinvarianz lässt sich wie in der nichtrelativistischen Theorie auf die LGE übertragen, indem man die Wellenfunktion ψ durch Multiplikation einer Phase geeignet transformiert:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda(x)} \psi(x).$$

Um $\Lambda(x)$ zu finden, setzen wir die gestrichelten Größen in die LGE ein und finden:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu' - \frac{e}{c} \partial_\mu \chi) (p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu - \frac{e}{c} \partial^\mu \chi) - m^2 c^2 \right] \cdot \psi' \cdot e^{-i\Lambda} \\ &= \left[(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu' - \frac{e}{c} \partial_\mu \chi) e^{-i\Lambda} (p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu - \frac{e}{c} \partial^\mu \chi + \hbar \partial^\mu \Lambda) - m^2 c^2 e^{-i\Lambda} \right] \psi' \\ &= e^{-i\Lambda} \left[(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu' - \frac{e}{c} \partial_\mu \chi + \hbar \partial_\mu \Lambda) \cdot (p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu - \frac{e}{c} \partial^\mu \chi + \hbar \partial^\mu \Lambda) - m^2 c^2 \right] \psi' \end{aligned}$$

\Rightarrow Mit der Wahl

$$\Lambda(x) = \frac{e}{\hbar c} \chi(x) \quad \text{geht dies in die Form der LGE über,}$$

$$\left[(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu') (p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu) - m^2 c^2 \right] \psi' = 0$$

(Beweis durch Nachrechnen)

Da physikalische Observable durch Erwartungswerte $\langle \psi | \dots | \psi \rangle$ dargestellt werden, spielt ein gemeinsamer gleicher Phasenfaktor $\Lambda(x)$ in ψ keine Rolle; die LGE mit minimaler Kopplung ist deshalb unter lokalen Eichtransformationen des em. Feldes invariant.

Kontinuitätsgleichung mit Feld:

Multipliziert man die LGE mit Feld von links mit $\langle \psi^* |$ und subtrahiert davon das komplex konjugierte, folgt die Kont. Gleichung als

$$\frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0 \text{ mit}$$

$$\rho(x) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] - \frac{e}{mc^2} A^0 \psi^* \psi$$

$$\vec{j}(x) = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] - \frac{e}{mc} \vec{A} \psi^* \psi$$

(Wechselt mit dem Faktor $\frac{\hbar}{2mi}$, analog zu nichtrel. QM)

bzw in Lorentz-kovarianten Form

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \text{ mit } (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix},$$

$$\boxed{j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^* \right] - \frac{e}{mc} A^\mu \psi^* \psi}$$

oder in "relativistischer" Normierung $j_{KG} = 2mc^2 j_s$:

$$j_{KG}^\mu = -i\hbar c^2 \left[\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^* \right] - 2ce A^\mu \psi^* \psi$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt durch Integration über den gesamten Raum der Erhaltungssatz

$$\boxed{Q = \int d^3x \rho(x) = \text{const}} \Rightarrow \text{Ladungserhaltung.}$$

Jeocher ist wobei $\rho(x)$ nicht positiv definit, da ψ und $\partial\psi/\partial t$ $\forall t$ willkürliche Werte annehmen können, so dass ρ und \vec{j} nicht als Wahrscheinlichkeitsgrößen interpretiert werden können.

\Rightarrow Suche nach einer relativistischen Wellengleichung von erster Ordnung in der Zeit, und mit positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte: DIRAC-Gleichung. Sie hat allerdings wie die KGE-Lösungen mit negativen Energieeigenwerten.

3.3 Hamiltonische Form der KGE

Die KGE (DGL 2. Ordnung) lässt sich in ein System von gekoppelten DGLn erster Ordnung überführen ("Schrödinger-artige" Form) durch die Ersetzungen (ψ Lösung der KGE)

$$\begin{aligned} \psi &= \phi + \varphi, & \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \right) \psi &= mc^2 (\phi - \varphi) \\ \bar{\psi} &= \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi &= \frac{1}{2mc^2} \left(mc^2 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \right) \psi \\ \varphi &= \frac{1}{2mc^2} \left(mc^2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA^0 \right) \psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0)(\phi + \varphi) = mc^2(\phi - \varphi)$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0)(\phi - \varphi) = \left[\frac{1}{m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + mc^2 \right] (\phi + \varphi)$$

Addition u. Subtraktion dieser Gleichungen ergibt ein gekoppeltes DGL-System 1. Ordnung

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 (\phi + \varphi) + (mc^2 + eA^0) \phi$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 (\phi + \varphi) - (mc^2 - eA^0) \varphi$$

und mit $\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}$ folgt die LGE in Hamiltonscher

Form,

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = H \bar{\Psi}}$$

$$\boxed{H = \frac{\sigma_3 + i\sigma_2}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + \sigma_3 mc^2 + eA^0}$$

mit den Pauli-Matrizen

(H ist nicht hermitesch, da $i\sigma_2$ nicht hermitisch ist!)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{i\sigma_2 = -(i\sigma_2)^\dagger}$$

Für die Lösungen der freien LGE folgt

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = H_0 \bar{\Psi}, \quad H_0 = \frac{\sigma_3 + i\sigma_2 \vec{p}^2}{2m} + \sigma_3 mc^2$$

mit dem Lösungsansatz

$$\bar{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)/\hbar}$$

$$\bar{\Psi}_{\vec{p}}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} mc + p_0 \\ mc - p_0 \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu / \hbar}$$

$$\bar{\Psi}_{\vec{p}}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} mc - p_0 \\ mc + p_0 \end{pmatrix} e^{+ip_\mu x^\mu / \hbar}$$

Da H nicht hermitesch ist, gibt es keine
positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte
 mit erhaltener Gesamt-Wahrscheinlichkeit:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int d^3x \bar{\Psi}^+ \Psi$$

$$\langle \bar{\Psi} | \hat{O} | \Psi \rangle = \int d^3x \bar{\Psi}^+ \hat{O} \Psi \quad (\hat{O} \text{ linearer Operator})$$

$$\langle \bar{\Psi} | \hat{O} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \bar{\Psi} \rangle^*$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi, \quad i\hbar \bar{\Psi}^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \bar{\Psi}^+ H \Psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial \bar{\Psi}^+}{\partial t} \Psi = (H \Psi)^+ \Psi = (\bar{\Psi}^+ H \Psi)^*$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\Psi} | \Psi \rangle &= \langle \bar{\Psi} | H | \Psi \rangle - \langle \bar{\Psi} | H | \Psi \rangle^* \\ &= \langle \bar{\Psi} | H - H^+ | \Psi \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Aufgrund der Nicht-Hermitizität von $H (\neq H^+)$
 sind seine Eigenzustände i. d. R. nicht orthogonal,
 und e^{iHt} ist nicht unitär \Rightarrow Heisenberg- und
 Schrödinger-Bild ergeben unterschiedliche Resultate.

3.4 KGE im Coulomb-Potential

Die KGE mit em. Feld war (S. 21)

$$\left[(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi)^2 - c^2 \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m^2 c^4 \right] \psi = 0$$

Für zeitunabhängiges \vec{A}, ϕ sind die stationären Lösungen mit positiver Energie

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt/\hbar} \varphi(\vec{x}), \quad E > 0$$

⇒ zeitunabhängige KGE:

$$(E - e\phi)^2 \varphi - c^2 \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \varphi + m^2 c^4 \varphi = 0$$

Für ein sphärisch symmetrisches Potential wie das Coulomb-Feld

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi(r), \quad r = |\vec{x}|, \quad \text{und } \vec{A} = 0 \text{ folgt}$$

$$\boxed{\left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4 \right) \varphi(\vec{x}) = [E - e\phi(r)]^2 \varphi(\vec{x})}$$

Wie in der nichtrelativistischen QM wird die Gleichung durch Separationsansatz gelöst; in sphärischen

Polarkoordinaten

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

└ Kugelfunktionen

⇒ Radialgleichung:

$$\left(-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = \frac{(E - e\phi(r))^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} R(r)$$

Betrachte zunächst den nichtrelativistischen

Grenzfall:

$$E \equiv mc^2 + E'; \quad E' - e\phi \ll mc^2$$

⇒ nichtrelativistische radiale Schrödingergleichung, denn die 2tes. wird

$$\frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[(mc^2)^2 + \underbrace{2mc^2 (E' - e\phi(r))}_{\downarrow} + (E' - e\phi(r))^2 - m^2 c^4 \right] R(r) \approx \frac{2m}{\hbar^2} [E' - e\phi(r)] R(r)$$

mit der nichtrelativistischen Energie E'

Für ein π^- Meson im Coulombfeld eines Kerns mit

$$m_{\pi^-} = 139.57 \text{ MeV}/c^2 \approx 273 m_e$$

mittl. Lebensdauer $\tau_{\pi^-} \approx 2.60 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

Ladungszahl Z :
(Abschätzung der Größenordnungen)

vs. klass. "Umlaufzeit" aus der Kurvenformel:

$$\Delta x \Delta p \equiv a_{\pi} m_{\pi} \frac{a_{\pi}}{t} \approx \hbar \quad ; \quad a_{\pi} \approx \frac{m_e}{m_{\pi}} a_B \approx \frac{1}{273} \cdot 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \tau \approx \frac{m_{\pi} a_{\pi}^2}{\hbar}$$

$$\approx 1.8 \cdot 10^{-13} \text{ s} \approx 180 \text{ fm}$$

$$\hbar \approx 1: \text{MeV} \cdot \text{fm} \approx 1/197.33$$

$$1 \text{ s} \approx 3 \cdot 10^{23} \text{ fm}$$

$$\approx \frac{139 \cdot 180^2}{197.33} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{23}} \text{ s}$$

$$\boxed{\tau \approx 7.6 \cdot 10^{-20} \text{ s}} \ll \tau_{\pi^-} \approx 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

⇒ Trotz des endlichen π^- Lebensdauer gibt es wohldefinierte stationäre Energiezustände.

Das Coulombpotential des Kerns ist

$$\boxed{e\phi(r) = -\frac{Ze^2}{r}}$$

und mit dem Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad \text{wird die Radialgleichung}$$

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr} r + \frac{l(l+1) - Z^2 \alpha^2}{r^2} - \frac{2Z\alpha E}{\hbar c r} - \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right] R = 0$$

Substituiere: $\sigma^2 = \frac{4(m^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}$; $\rho = Z\alpha r$

$$\lambda = \frac{2E\rho}{\hbar c \sigma} \quad ; \quad \rho = \sigma r$$

⇒ kompakte Form der Radialgleichung für die neue Variable ρ :

$$\boxed{\left[\frac{d^2}{d(\rho/2)^2} + \frac{2\lambda}{\rho/2} - 1 - \frac{l(l+1) - \rho^2}{(\rho/2)^2} \right] \rho R(\rho) = 0}$$

Das ist die Gestalt der nichtrelativistischen SE für die Funktion $u \equiv \rho R$, wenn wir ersetzen

$$\rho_0 \rightarrow 2\lambda \quad \left(\rho_0 = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \cdot \frac{Ze^2}{\hbar} \right)$$

$$l(l+1) \rightarrow l'(l'+1) \equiv l'(l'+1)$$

(l' i.a. nicht ganzzahlig)

(Auch in der klassischen relativistischen Mechanik findet sich eine solche Änderung des Zentrifugalkonts; das sind die elliptischen Kepler-Bahnen nicht mehr geschlossen, sondern werden zu Rosettenbahnen).

Die Radialgleichung wird analog zum unrel. Fall gelöst:

Fall gelöst:

$$R(\rho) \begin{cases} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\ell'} & , \rho \rightarrow 0 \\ e^{-\rho/2} & , \rho \rightarrow \infty \end{cases}$$

=> Lösungsansatz:

$$\rho R(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\ell'+1} e^{-\rho/2} w(\rho/2)$$

mit der DGL für $w(\rho)$ analog zum Schwächtefall:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell'(\ell'+1)}{\rho^2} + \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right] \rho R(\rho) = 0$$

$$\rho R(\rho) = u(\rho) = \rho^{\ell'+1} e^{-\rho} w(\rho)$$

$$\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + 2(\ell'+1-\rho) \frac{dw}{d\rho} + (\rho_0 - 2(\ell'+1))w = 0$$

Lösung durch Potenzreihenansatz

$w(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$. Die aus der DGL folgende Rekursionsrelation ergibt eine Funktion $\propto e^{-\rho}$ (s.f. 31).

Damit $R(\rho)$ normierbar bleibt, muss die Reihe abbrechen.

einsetzen
ergibt

RQK31

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [k(k-1)p^{k-1} + 2(l+1)kp^{k-1} - 2kp^k + (p_0 - 2(l+1))p^k] = 0$$

Die Koeffizienten jeder Potenz von p müssen Null sein, also für p^k :

$$[(k+1)k + 2(l+1)(k+1)] a_{k+1} + [-2k + (p_0 - 2(l+1))] a_k = 0$$

⇒ Rekursionsrelation zur Berechnung von

a_{k+1} aus a_k :

$$a_{k+1} = \frac{2(k+l+1) - p_0}{(k+1)(k+2l+2)} \cdot a_k$$

Für die Konvergenz ist das Verhältnis $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ für $k \rightarrow \infty$ relevant:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{k}$$

Vergleich mit der Exponentialreihe

$$e^{2p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2p)^k$$

mit den aufeinander folgenden Koeffizienten

$$\frac{2^{k+1} / (k+1)!}{2^k / k!} = \frac{2}{k+1} \approx \frac{2}{k}$$

d.h. die Reihe für $w(p)$ verhält sich wie e^{2p} . Damit nicht $u(p) \propto e^{-p} w(p) \rightarrow e^p$ für große p resultiert, (sonst ist $u(p)$ nicht normierbar) muss die Reihe abbrechen.

Bricht die Reihe nach dem N-ten Glied ab,
 ist $w(p)$ ein Polynom N-ten Grades.

Die Abbruchbedingung

$$a_{N+1} + a_{N+2} = \dots = 0 \text{ ergibt mit der Rekursionsrelation}$$

$$\boxed{p_0 = 2(N + e' + 1)}, \quad N = 0, 1, 2,$$

$N = 0, 1, 2,$

radiale Quantenzahl

mit $p_0 \rightarrow 2\lambda \Rightarrow$

$$\boxed{\lambda = N + e' + 1}$$

(bit auf e' analog zum Schwefeltypfall)

Zur Bestimmung der Energiewerte eliminieren wir σ :

$$\sigma = \frac{2E\gamma}{\hbar c \lambda} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{4E^2\gamma^2}{\hbar^2 c^2 \lambda^2} = \frac{4(m^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}$$

und erhalten die Energiewerte

$$\boxed{E = mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2}}$$

(positive Wurzel, da $\sigma > 0, \lambda > 0 \Rightarrow E > 0$)

\Rightarrow Für verschwindende Auslenkung $\gamma = 2\alpha \rightarrow 0$ geht die Energie dieser Lösungen gegen die

Ruheenergie,

$$\boxed{E \xrightarrow{p \rightarrow 0} mc^2}$$

Berechnung von e' aus der Definitionsgleichung

$$e'(e'+1) = e(e+1) - \gamma^2$$

$$\Rightarrow l' = -\frac{1}{2} \frac{(+)}{(-)} \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2} \quad (\text{un}^+ \text{ zulässig, damit die leinet. Energie endlich bleibt}).$$

$$\Rightarrow E_{Ne} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left[N + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right]^2}}$$

In nichtrelativistischer Notation ist die Hauptquantenzahl

$$n = N + l + 1; \text{ damit wird } E \quad (n=1,2,\dots \\ l=0,1,\dots,n-1)$$

$$E_{ne} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left[n - \left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right]^2}}$$

Die in der nichtrel. Theorie vorhandene Entartung bezüglich des Drehimpulses ist hier aufgehoben.

Entwicklung der Energie in eine Potenzreihe ergibt

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right] + \mathcal{O}(\gamma^6)$$

$$E = mc^2 - \frac{R_y}{n^2} - \frac{R_y \gamma^2}{n^3} \left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) + \mathcal{O}(R_y \gamma^4)$$

Ruheenergie nichtrel.

Rydberg-Energie,

relativistische

Korrektur

$$R_y = \frac{mc^2 (Z\alpha)^2}{2} = \frac{m Z^2 e^4}{2\hbar^2} \quad (= 13.6 \text{ eV} \\ \text{für } Z=1, m=m_e)$$

Die relativistische Korrektur hebt die Entartung in l auf:

$$E_{l=0} - E_{l=u-1} = - \frac{4R_y \alpha^2}{n^3} \frac{u-1}{2u-1}$$

Damit l' und die Enegkeigenwerte reell sind, muss (s. Ausdruck für l') gelten

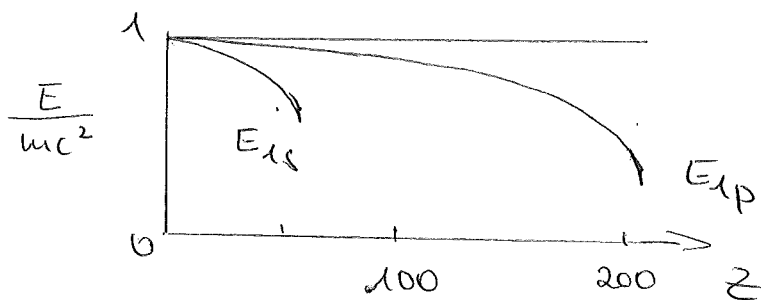
$$\boxed{l + \frac{1}{2} > Z\alpha}$$

Für s -Zustände mit $l=0$ bedeutet das

$$Z < \frac{1}{2\alpha} \approx \frac{137}{2} = 68.5 \quad ; \quad \text{für } l=1, \quad Z < 205.5$$

für größere Z wird das System instabil, die Lösungen zum Coulomb-Potential werden für $Z > 68$ unendlich. Reale Kerne haben jedoch einen endlichen

Radius (keine Punktladung), für den Bindungszustände auch für $Z > 68.5$ existieren; s. 3.5.



Beim Vergleich mit realen plonischen Atomen muss demnach:

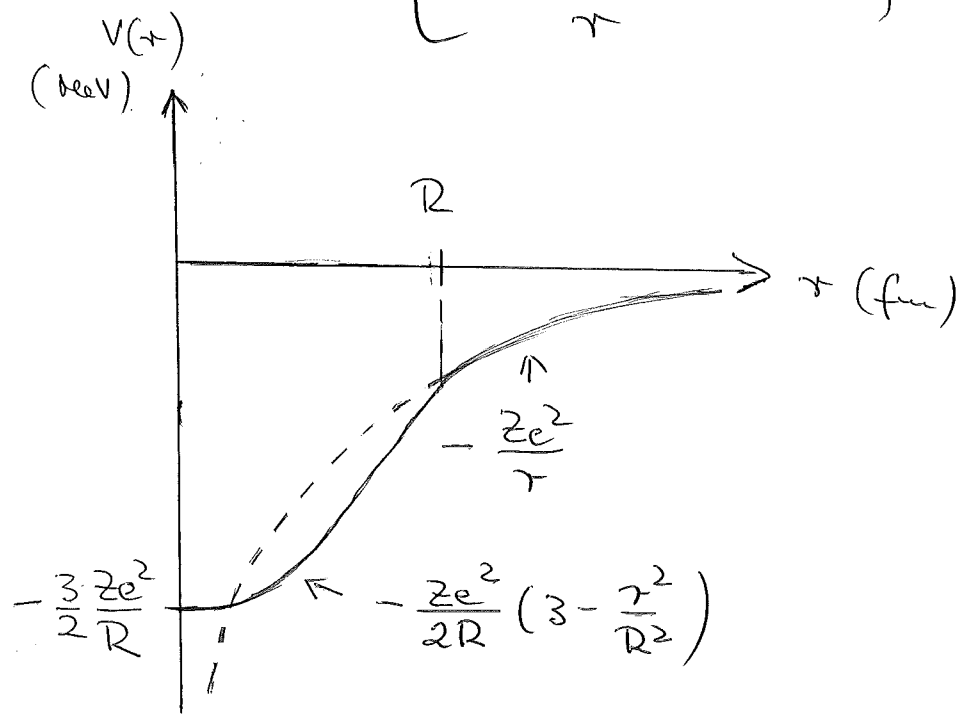
- Das endliche Kernradius berücksichtigt werden
- Die Masse m_{π} durch die reduzierte Masse ersetzt werden, $\mu = \frac{m_{\pi} M}{m_{\pi} + M}$
- Die Vakuumpolarisation muss berücksichtigt werden (virtuelle Elektron-Positron-Paare)
- Die starke WW Plon-kern muss abgeleitet werden.

(KGE im)
3.5 Oszillator-Coulomb-Potential

Die exaktere Ausdehnung des $l=0$, die auch für $Z > 68.5$ $l=0$ Bindungszustände ermöglicht, lässt sich durch ein Oszillator-Coulomb-Potential berücksichtigen.

Wir betrachten dazu den Kern näherungsweise als homogen geladene Kugel, mit Potential

$$eA^0(r) = V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r \leq R \\ -\frac{Ze^2}{r}, & r > R \end{cases}$$



$Z = 82$?
 $V(0) \approx -25 \text{ MeV}$
 $\left(\approx -\frac{82 \cdot 197 \cdot 1.5 \text{ MeV}}{7.1 \cdot 137} \right)$
 mit $R = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$
 $\approx 7.1 \text{ fm}$

Die Radialgleichung wird auch für dieses Potential durch Potenzreihenansatz gelöst (siehe z.B. A. Wachs, Relativist. QM, Springer, pp. 82 - 87). Es ergibt sich ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen dem Zustandswegener E und der Kernladungszahl Z , und es existieren auch für große Z - und kleine l -Werte gebundene Zustände.

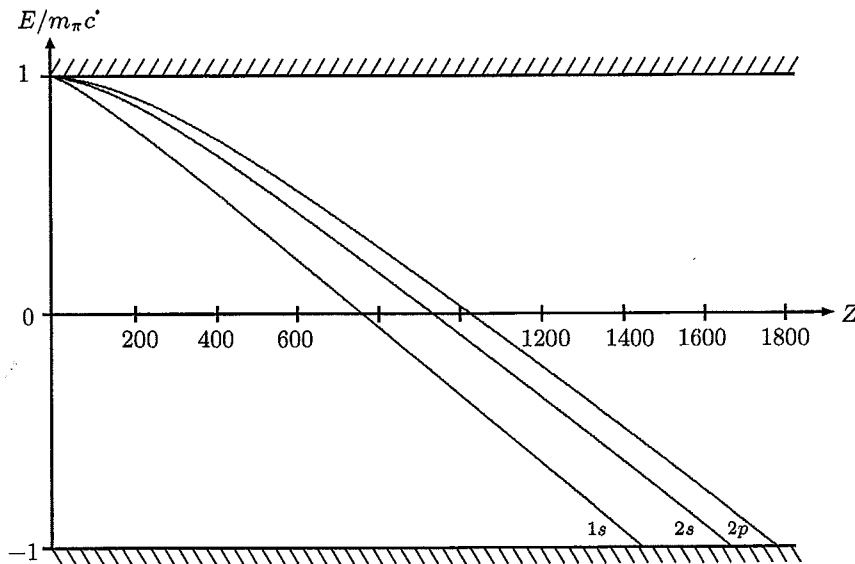


Abb. 1.10. Energiewerte gebundener 1s-, 2s- und 2p-Pionzustände im Feld einer homogen geladenen Kugel (Oszillator-Coulomb-Potential) als Funktion von Z. Der Kugelradius (Kernradius) beträgt $R = 10$ fm.

verschiedene Kernladungszahlen Z der V-Erwartungswert des 1s-Pionradius, $\langle r \rangle_V$, das elektrostatische Oszillator-Coulomb-Potential V an der Stelle $\langle r \rangle_V$, die Bindungsenergie $E_B = E_{1s} - m_\pi c^2$ sowie die mittlere quadratische Abweichung $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle_V - \langle r \rangle_V^2}$ angegeben. Vergleicht man diese Werte mit der Ruheenergie $m_\pi c^2 = 139.577$ MeV des Pions und seiner Compton-Wellenlänge $\lambda_\pi = 1.414$ fm, so folgt für den schwachen Bindungsfall

$$Z = 2: |E_B|, |V(\langle r \rangle_V)| \ll m_\pi c^2, \Delta r \gg \lambda_\pi.$$

	$Z = 2$	$Z = 1450$
$\langle r \rangle_V$	146.4 fm	3.7 fm
$V(\langle r \rangle_V)$	-0.02 MeV	-298.9 MeV
E	-0.05 MeV	-278.8 MeV
Δr	84.3 fm	1.6 fm

\Rightarrow Euklidenumkonzept
gültig.

Tab. 1.1. Kennzahlen des gebundenen 1s-Pionzustandes im Oszillator-Coulomb-Potential für den schwachen ($Z = 2$) und starken ($Z = 1450$) Bindungsfall.

Bei starker Bindung; sei $Z = 1450$:

$$|E_B|, |V(\langle r \rangle_V)| \approx 2 m_\pi c^2, \Delta r \approx \lambda_\pi$$

\Rightarrow Euklidenumkonzept nicht mehr gültig!

[aus: A. Wachen, Relat. QM, Springer, pp. 85f.]

Eine direkte Bestätigung dieser Feststellungen ergibt sich durch die Betrachtung der radialen Ladungsdichte des 1s-Pionzustandes,

$$r^2 \rho(r) = \frac{E - V(r)}{m_\pi c^2} u_l^2(r).$$

Im schwachen Bindungsfall ($Z = 2$) ist E positiv, und die radiale Ladungsdichte ist, wie gewünscht, positiv definit. Demgegenüber besitzt die radiale Ladungsdichte im starken Bindungsfall ($Z = 1450$) aufgrund des zugehörigen negativen Energiewertes keinen einheitlichen Verlauf und geht ab $r \approx 15$ fm in negative Werte über, was mit dem Ein-Teilchenkonzept unvereinbar ist (siehe Abb. 1.11). Die physikalische Bedeutung dieses Vorzeichenwechsels in starken Feldern (wie auch beim Kastenpotential und Potentialtopf) lässt sich letztlich nur im Rahmen von Quantenfeldtheorien richtig verstehen, wo die Teilchenzahl variabel ist.

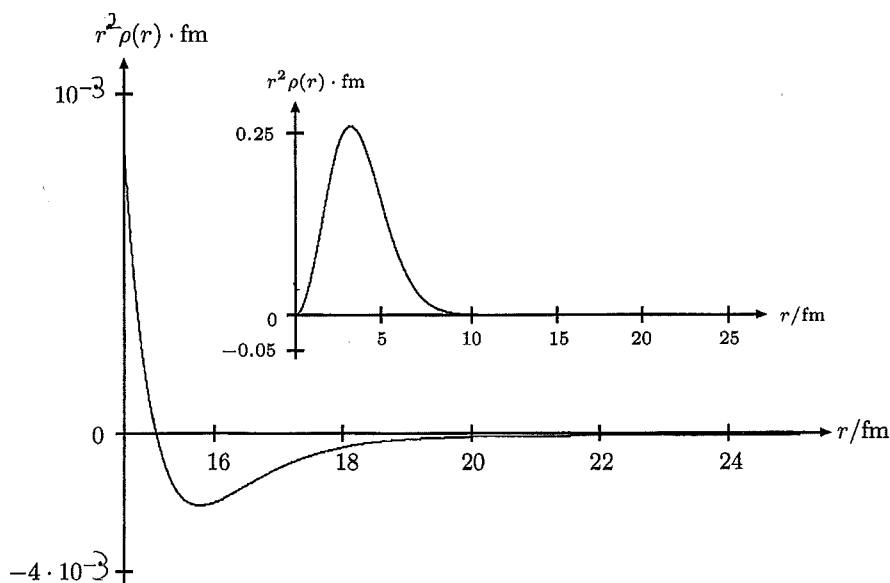


Abb. 1.11. V-normierte radiale Ladungsdichte des 1s-Pionzustandes im Oszillator-Coulomb-Potential mit $Z = 1450$ und $R = 10$ fm. Die große Grafik zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der kleinen Grafik. Bei $r \approx 15$ fm wechselt die Ladungsdichte ihr Vorzeichen.

4. DIRAC-Gleichung (DE)

4.1 Einleitung

Um die mit der LGE verbundenen Schwierigkeiten zu vermeiden - insbesondere nicht-positive-definite

Dichte-, suche P. DIRAC nach einer in den zeitlichen und räumlichen Ableitungen linearen Gleichung:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_D \psi \right]$$

[P. Dirac, Proc. Roy. Soc. A117, 610 (1928)]

mit dem DIRAC-Operator

$$\left[H_D = \frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \right] = c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2$$

da bei korrekter Wahl von α^k ($k=1,2,3$) und β die DE ergibt (Summation über doppelte Indizes!).

Da die Gleichung von 1. Ordnung in der Zeit ist, bleibt die Dichte positiv; wegen der Forderung relativistischer Invarianz dürfen dann auch die räumlichen Ableitungen von 1. Ordnung sein.

Der Dirac-Hamiltonoperator H_D ist linear im Impulsoperator und in der Ruheenergie.

Damit H_D hermitisch ist - $H_D = H_D^\dagger$ - müssen α^k und β hermitesche $N \times N$ Matrizen sein.

(wird einfache Zahlen, da die Gleichung dann nicht forminvariant bei räumlichen Drehungen ist),

$\Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ ist ein n -komponentiger Spaltenvektor.

4.2 Forderungen an die Gleichung; Ableitung der DE

(1) Die Komponenten ψ_1, \dots, ψ_N von ψ müssen die lGE erfüllen, so dass ebene Wellen als Lösungen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ erfüllen.

(2) \exists erhaltenen Observablen, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist; es gilt die Kontinuitätsgl.

(3) Die Gleichung muss Lorentz-kovariant sein:

(1), (2), (3) \Rightarrow DIRAC-Gleichung.

Konsequenzen dieser Bedingungen:

zu (1): zweifache Anwendung von \hbar ergibt

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) \partial_i \partial_j \psi + \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^3 (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \partial_i \psi + \beta^2 m^2 c^4 \psi$$

(der erste Term auf der r.h.s. wurde wg. $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ symmetrisiert).

Division: $(\hbar c^2)$ und Vergleich mit der LGE,

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \text{ ergibt}$$

drei Bedingungen an die α^k, β :

$$\left. \begin{aligned} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i &= 2 \delta^{ij} \cdot \mathbb{1} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i &= 0 \\ (\alpha^i)^2 &= \beta^2 = \mathbb{1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Forderungen an die algebraische Struktur der DIRAC-Matrizen.}$$

zu (2): Definiere den zu ψ adjungierten Zeilenvektor

$$\psi^+ \equiv (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$$

Multipliziere die DE von links mit ψ^+

$$\Rightarrow i \hbar \psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \psi^+ \alpha^k \partial_k \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi$$

Die dazu komplex konjugierte Relation wird

$$-i \hbar \cdot \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_k \psi^+) \alpha^{k+} \psi + mc^2 \psi^+ \beta^+ \psi$$

und die Differenz beider Gleichungen $\cdot (-i \hbar)$ ergibt (mit $\frac{\partial}{\partial t} \psi^+ \psi = \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^+}{\partial t}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi^+ \psi &= -c \left[(\partial_k \psi^+) \alpha^{k+} \psi + \psi^+ \alpha^k \partial_k \psi \right] + \\ &+ \frac{i mc^2}{\hbar} (\psi^+ \beta^+ \psi - \psi^+ \beta \psi) \end{aligned}$$

Damit dieser Ausdruck die Form einer Kontinuitätsgleichung erhält,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \right], \text{ m\u00fcssen die Matrizen } \alpha^k, \beta \text{ hermitesche sein!}$$

$$(\alpha^k)^{\dagger} = \alpha^k; \quad \beta^{\dagger} = \beta \Rightarrow \text{letzter Term f\u00e4llt weg,}$$

und mit der Dirac

$$\rho \equiv \psi^{\dagger} \psi \equiv \sum_{n=1}^N \psi_n^* \psi_n, \text{ und der Stromdichte}$$

$$j^k \equiv c \psi^{\dagger} \alpha^k \psi$$

$j^0 \equiv c \rho$ ist die KG erf\u00fcllt; in kovarianter

Form mit

$$j^{\mu} \equiv (j^0, j^k) \quad k=1,2,3 \Rightarrow$$

$$\left[\partial_{\mu} j^{\mu} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j^0 + \frac{\partial}{\partial x^k} j^k = 0 \right]$$

Eigenschaften der Dirac-Matrizen:

Die Matrizen α^k, β antikommutieren:

$$\{\alpha^k, \beta\} = 0; \text{ i.w. Quadrat ist } \mathbb{1} \text{ (s.o.):}$$

$$(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \text{Eigenwerte } \pm 1.$$

Schreibe diese Bedingung als

$$\alpha^k \beta^2 \equiv \alpha^k = -\beta \alpha^k \beta \quad (\alpha^k \beta = -\beta \alpha^k)$$

und benutze die zyklische Invarianz der Spur,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\alpha^k) &= -\text{Sp}(\beta \alpha^k \beta) = -\text{Sp}(\alpha^k \beta^2) = \\ &= -\text{Sp}(\alpha^k) = 0, \text{ und analog f\"ur } \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(\alpha^k) = \text{Sp}(\beta) = 0.$$

\Rightarrow Die Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte muss gleich sein

$$\Rightarrow \boxed{N \text{ ist geradzahlig}}.$$

Ann: $N=2 \Rightarrow \#$, denn die 4 2×2 Matrizen

$\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ enthalten nur 3 antikommutierende Matrizen, wir brauchen jedoch wier.

$N=4$ ist demnach die kleinstmögliche Dimension,
in der die geforderte algebraische Struktur
realisierbar ist.

Eine spezielle Darstellung der Matrizen ist ("Dirac-Darst.")

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

[Weyl-Darstellung:

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}]$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und der Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die algebraischen Beziehungen lassen sich leicht testen,
z.B. ist die zweite Bedingung

$$\alpha^k \beta + \beta \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Diese Darstellung ist die "Standarddarstellung" der DE.
 γ heißt "Diracspinor" oder einfache "Spinor", γ^+ der
hermitesche adjungierte Spinor. Sie haben spezifische
Transformations-eigenschaften unter LT.

DE in kovarianten Form:

um zeitliche u. räumliche Ableitungen in kovarianten
Schreibweise zusammenzufassen, multiplizieren
wir zunächst die DE mit β/c und erhalten:

4.3 DE in kovarianter Form

$$+ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi - \underbrace{\left[\frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \right]}_{H_D} \psi = 0 \quad | \cdot \left(-\frac{\beta}{c} \right)$$

$$\left[-i\hbar \beta \partial_0 - i\hbar \beta \alpha^k \partial_k + m c \right] \psi = 0$$

definiere neue DIRAC-Matrizen

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^k \equiv \beta \alpha^k$$

mit den folgenden Eigenschaften

(1) γ^0 hermitesch, $\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger$

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$$

(2) γ^k antihermitesch, $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$; $(\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

(Beweis: $(\gamma^k)^\dagger = (\beta \alpha^k)^\dagger = \alpha^k \beta = -\beta \alpha^k = -\gamma^k \checkmark$)

$$(\gamma^k)^2 = \underbrace{\beta \alpha^k \cdot \beta \alpha^k}_{-\beta \alpha^k} = -\mathbb{1} \checkmark$$

Diese Relationen ergeben zusammen mit den folgenden Antikommutationsrelationen

$$\{ \gamma^0, \gamma^k \} \equiv \gamma^0 \gamma^k + \gamma^k \gamma^0 = \beta \beta \alpha^k + \underbrace{\beta \alpha^k \beta}_{-\beta \alpha^k} = 0$$

$$\{ \gamma^k, \gamma^l \} \equiv \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k = \underbrace{\beta \alpha^k \beta \alpha^l}_{-\alpha^k \alpha^l} + \underbrace{\beta \alpha^l \beta \alpha^k}_{-\alpha^l \alpha^k} = 0, \quad k \neq l$$

$$= -\alpha^k \alpha^l = -2, \quad k=l$$

⇒ die grundlegende algebraische Strukturen der DIRAC Matrizen:

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}}$$

$(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}$
["Clifford-Algebra"]

und die DIRAC Gleichung erhält die Gestalt

$$(-i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc) \psi = 0$$

$$\boxed{\left(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0}$$

DIRAC-Gleichung, DE

R. Feynman hat folgende abkürzende Schreibweise eingeführt:

$$\not\partial \equiv \gamma \cdot \partial \equiv \gamma^\mu \partial_\mu = \not\partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} \quad (\not\partial_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu)$$

($\partial^\mu \hat{=}$ beliebiger Vektor; slash / $\hat{=}$ skalare Multiplikation mit γ^μ)

Damit wird die freie DIRAC-Gleichung

$$\boxed{\left[-i\not\partial + \frac{mc}{\hbar}\right] \psi = 0}$$

mit den γ -Matrizen in der oben angegebenen speziellen Darstellung ("Dirac-Darstellung")

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

Eine dazu äquivalente Darstellung ergibt sich durch

$$\gamma \rightarrow U \gamma U^{-1}$$

mit einer beliebigen unitären Matrix U . (Andere gebräuchliche Darstellungen: Majorana-, chiral-Darst., Dirac-Darst.)

4.4 Lösungen der freien DE

Die Lösungen zu definiertem Impuls \vec{p} sind

$$\psi_{\vec{p},1,2}^{(+)}(x) = e^{-i(c p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{x}) / \hbar} \begin{pmatrix} \chi_{1,2}^{(+)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + m c} \chi_{1,2}^{(+)} \end{pmatrix} \quad (\text{pos. Energie})$$

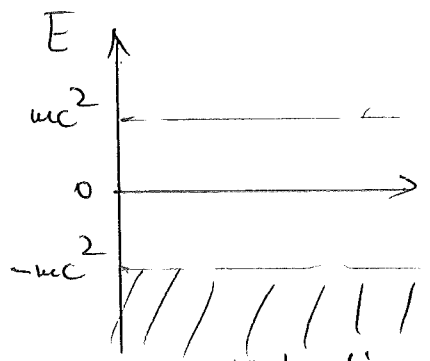
$E > 0$

$$\psi_{\vec{p},1,2}^{(-)}(x) = e^{+i(c p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{x}) / \hbar} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + m c} \chi_{1,2}^{(-)} \\ \chi_{1,2}^{(-)} \end{pmatrix} \quad (\text{neg. Energie})$$

mit $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} > 0$

wobei $\chi_{1,2}^{(\pm)}$ jeweils zwei linear unabhängige zweikomponentige konstante Spinoren bezeichnen.

Wie bei der LGE gibt es zwei Sorten von Lösungen, die einer mit positiver Energie $E = +c p_0$, für die sich alle Interpretationen als Teilchenwellenfunktion anbieten, und eine andere mit negativer Energie $E = -c p_0$; dazwischen liegt das „verbotene“ Energieintervall $[-m c^2 \dots m c^2]$.



(Zur phys. Interpretation der ^{Lösungen zu} negativen Energien und dem Zusammenhang zu Antiteilchen s. auch Erläuterung).

neg. E-Kontinuum:
Löser $\hat{=}$ Antiteilchen.

Die positiven und negativen Lösungen sind aufgrund der Freiheiten bei der Wahl der Spinoren $\chi_{1,2}^{(\pm)}$ noch nicht eindeutig spezifiziert, so dass wir neben dem Dirac-Hamiltonoperator H_D und dem Impulsoperator \vec{p} einen weiteren Operator erwarten, der nur auf die inneren Freiheitsgrade der Wellenfunktionen wirkt, und zusammen mit H_D und \vec{p} einen vollständigen Satz kommutierender Observablen bildet. Dieser Operator hängt mit dem Spin zusammen, dessen Quantenzahl den Wert $\frac{1}{2}$ hat (s. später); die DE ist deshalb für die Beschreibung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen geeignet.

Für ein freies ruhendes Teilchen mit Wellenzahl $k=0$, Impuls $\vec{p}=0$ ist die DE

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \beta mc^2 \psi}$$

mit den Lösungen zu pos./neg. Energien $E = \pm mc^2$,

$$\psi_1^{(+)} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2^{(+)} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_1^{(-)} = e^{+\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2^{(-)} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Kopplung an das em. Feld

Wie in der nichtrel. Theorie wird der kanonische Impuls \vec{p} durch den kinetischen Impuls $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ ersetzt, und das skalare elektrische Potential $e\phi$ kommt zur Ruheenergie im Dirac-Hamilton-Operator hinzu („minimale Kopplung“; s. LGE):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[c \cdot \vec{\alpha} \cdot \underbrace{\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)}_{\equiv \vec{\pi}} + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi$$

mit der Ladung e des Teilchens mit Masse m ,
 beim Elektron also $e = -e_0$.

Der Hamiltonoperator mit Feld ist nach wie vor hermitesch. Analog zum Klein-Pardon Fall

ist die Umwandlung unter der lokalen Eichentransformation

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

bzw. $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$ invariant, wenn gleichzeitig die Wellenfunktion ψ mit einer entsprechenden Phase multipliziert wird:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\Lambda(x)} \psi$$

$$\Lambda(x) = \frac{e}{\hbar c} \chi(x)$$

($\chi(x)$ eine beliebige reelle skalare Funktion der Raumzeit-Koordinaten).

Nichtrelativistischer Grenzfall

Verwende die explizite Darstellung der Dirac-Matrizen

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

und zerlege den 4er Spinor ψ in zwei zweikomponentige Spaltenvektoren,

$$\psi = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \chi \end{pmatrix}; \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \bar{\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{wg. } \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$$

\Rightarrow DE:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \chi \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \bar{\varphi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ -\chi \end{pmatrix}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Ruheenergie mc^2 die größte Energie im Problem; wir zerlegen deshalb in der Lösung zu positiver Energie

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \chi \end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Hier variieren $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ nur langsam und gemittelt erfüllt die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

(Bew: die Zeitableitung auf das $e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t}$ ergibt einen Term
 $i\hbar \cdot \frac{-imc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = +mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}; \quad -mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} = 0$)

In der "unbaren" Gleichung vernachlässigen wir $\hbar \chi$ und $e\phi \chi$ gegenüber $2mc^2 \chi$.

Ausatz:
$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc} \varphi$$

\Rightarrow Im nichtrel. Grenzfall ist χ gegenüber φ um einen Faktor der Größenordnung $\sim \frac{v}{c}$ kleiner; φ ist die "große", χ die "kleine" Komponente des Spinors; sie wird im nr. Grenzfall vernachlässigt.

Ausatz in "erste" DGL einsetzen; ^(für φ) der Massenterm fällt weg:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) + e\phi \right] \varphi$$

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} = -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

und es ist

$$\sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

(prüfen durch Nachrechnen; $\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{gerade Permut.} \\ -1, & \text{ungerade Permut. v. 1,2,3} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$)

$$\Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} = \vec{\pi}^2 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\pi}) =$$

$$= \vec{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (\text{mit } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\begin{aligned} [\vec{\pi} \times \vec{\pi}] &= (-i\hbar) \left(-\frac{e}{c}\right) (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= i \frac{e\hbar}{c} \vec{B} \end{aligned}$$

damit

$$\left(\vec{\pi} \times \vec{\pi} \right)^i = -i\hbar \left(\frac{-e}{c} \right) \epsilon^{ijk} \left(\partial_j A^k - A^k \partial_j \right)$$

$$\vec{\pi} = -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad = \quad i \frac{\hbar e}{c} \epsilon^{ijk} \left(\partial_j A^k - A^k \partial_j \right)$$

$$\text{mit } \boxed{B^i = \epsilon^{ijk} \left(\partial_j A^k - A^k \partial_j \right)} \hat{=} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

\Rightarrow DE mit em. Feld im nichtrel. Grenzfall ("große" Komponente)

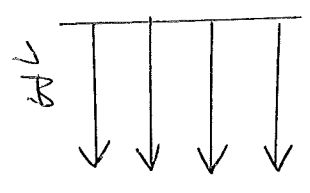
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\phi \right] \psi$$

Dies Resultat entspricht der Pauli-Gleichung der nichtrel. QM für den Pauli-Spinor ψ , dessen beide Komponenten den Spin der Elektron beschreiben.

Auch der (bis auf QED-Korrekturen) richtige gyromagnetische Faktor $g=2$ kommt heraus.

Zum Beweis wiederhole alle aus der nichtrelativistischen QM bekannten Schritte:

gegeben sei ein homogenes Magnetfeld \vec{B} mit Vektorpotential \vec{A} :



$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \frac{1}{2} \vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\text{wg. } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \left(\vec{B} \cdot \vec{B} = 0 \right) \quad \checkmark$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2$$

Bahndrehimpuls und Spin :

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Bahndrehimpuls

$\vec{S} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma}$

$\frac{1}{2m} \left(\vec{p}^2 + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 - \frac{2e}{c} \vec{p} \cdot \vec{A} \right) - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} =$

$$\left[\begin{aligned} \text{I: } -2\vec{p} \cdot \vec{A} &= -2 \frac{1}{2} \vec{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) = -\vec{L} \cdot \vec{B} \\ \left[\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) \right] \\ \Rightarrow \vec{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) &= \vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{B} \cdot \vec{L} \end{aligned} \right] \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{2\vec{S}}{\hbar} \cdot \vec{B} \right]$$

$= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 - \frac{e}{2mc} (\vec{L} \cdot \vec{B} + 2\vec{S} \cdot \vec{B})$

\Rightarrow NR Näherung der Dirac-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 + e\phi \right] \psi$$

$\equiv \vec{\mu}$, magnetisches Moment aus Bahn- und Spinanteil.

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = [H_0 + H_{int}] \psi$$

$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

$$H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 + e\phi$$

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\text{Bahn}} + \vec{\mu}_{\text{Spin}} = \frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S})$$

Das Spin-Moment ist demnach

$$\vec{\mu}_{\text{Spin}} = \frac{e}{2mc} \cdot 2\vec{S} \equiv g_e \frac{e}{2mc} \vec{S}$$

mit dem Landé-Faktor (gyromagnetischen Faktor)

$g_e = 2$: bestimmt um wieviel stärker sich der Spin auf die Teilchenenergie auswirkt als ein gleich großer (Im Rahmen der Quantenelektrodynamik, Bahndrehimpuls)

werden Korrekturterme abgeleitet: $g_e^{th} = 2.0023193048(8)$

Mit dem Bohrschen Magneton (Bomag) $g_e^{ex} = 2.0023193043622$ (22)

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (\approx 5.788 \cdot 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{T}^{-1}) \quad ; \quad \frac{e}{2mc} \equiv -\frac{\mu_B}{\hbar}$$

lässt sich das magnetische Spin-Moment

des Elektrons ($m \equiv m_e$) schreiben als $e \equiv -1$ elektr. Elementarladung (Vorzeichen!) $\equiv -e_0$

$$\vec{\mu}_{\text{Spin}} = -g_e \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} \Rightarrow \left| \frac{\vec{S}}{\mu_{\text{Spin}}} \right| \approx \mu_B$$

Für ein Coulombpotential $e\phi = -\frac{ze_0^2}{r}$ ist das Zeitverhalten der Lösung ψ durch die Rydberg-

Energie charakterisiert, $Ry = \frac{mc^2 \alpha^2}{2} \rightarrow 13.6 \text{ eV}$ für $z=1$ ($\alpha = \frac{e\hbar}{mc}$)

Bei kleinem z (insbesondere H-Atom mit $z=1$) ist die Ruheenergie des Elektrons sehr viel größer als diese Energie, $511 \text{ keV} \gg 13.6 \text{ eV}$, so dass die Vernachlässigung von X in der Bewegungsgleichung gerechtfertigt ist.

Ankopplung an das em. Feld in kovariante Form: analog zu LGE

$$\mathcal{D}E \quad [-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}] \psi = 0$$

$$[-i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}] \psi = 0$$

Impulsoperatoren in kovariante Notation

$$p_\mu = i\hbar \partial_\mu, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{kovariant}$$

$$p^\mu = i\hbar \partial^\mu, \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{kontravariant}$$

zeitl. und räuml. Komponenten:

$$p^0 = p_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}; \quad p^1 = -p_1 = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^1}$$

Minimale Kopplung an das em. Feld durch

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad A^\mu = (A^0, \vec{A}), \quad A^0 = c\phi$$

(d.h. die Ableitungen werden ersetzt durch "Ableitung - Overpotential")

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu$$

(entspricht $i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} - e\phi$)

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{e}{c} A_i = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A^i$$

$$\Rightarrow \boxed{[-\gamma^\mu (i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) + mc] \psi = 0}$$

Relativistische kovariante Form des DE mit em. Feld.

Kontinuitätsgleichung mit em. Feld

Aufgrund der Hermitizität des Hamilton-Operators ermöglicht die DE -im Reversatz zw LGE- die Definition einer positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte.

Beweis: DE

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left[c \vec{\alpha} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) + e\phi + \beta mc^2 \right] \psi(x)$$

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \cdot \Big|, \quad \text{Multiplikation mit } \psi^\dagger$$

$$\Rightarrow i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \psi^\dagger \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi - e \psi^\dagger \vec{\alpha} \vec{A} \psi + e\phi \psi^\dagger \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi$$

Adjunktion der DE (mit $\alpha = \alpha^\dagger, \beta = \beta^\dagger$) und anschließende Multiplikation von rechts mit ψ ergibt

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} \psi - e \psi^\dagger \vec{\alpha} \vec{A} \psi + e\phi \psi^\dagger \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt eine Kontinuitätsgleichung der Form (alle Terme mit \vec{A}, ϕ, m haben sich weg):

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0} \quad \text{mit } \rho = \psi^\dagger \psi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi$$
$$\vec{j} = \psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi$$

Wendet man hierauf den Poincaré Satz an, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \rho = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint dF \vec{j} = 0:$$

die Gesamtwahrscheinlichkeit ist zeitlich konstant,
 $\int d^3x \rho(x) = \text{const.}$

Dies rechtfertigt zusammen mit

$$\psi^\dagger \psi = \sum_{\mu} \psi_{\mu}^* \psi_{\mu} = \sum_{\mu} |\psi_{\mu}|^2 \geq 0$$

die Interpretation von ρ als positive definite
Wahrscheinlichkeitsdichte, und elementsparend \vec{j}
als Wahrscheinlichkeitsstromdichte.

Ferner kann das in der nichtrelativistischen QM
eingeführte Skalarprodukt (in der Ortsdarstellung)
übernommen werden:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d^3x \psi^\dagger(x) \phi(x)$$

mit den Konsequenzen

- Orthogonalität der Eigenzustände hermitescher Operatoren mit verschiedenen Eigenwerten
- Darstellungsunabhängigkeit des Skalarproduktes unter unitären Transformationen:

Im Gegensatz zum nichthermiteschen Klein-Pondon-Fall
ist im hermiteschen DIRAC-Fall keine Modifikation
des in der nichtrelativistischen Theorie gebräuchlichen

Begriffe "Skalarprodukt", "Hermitizität", und

"Unitarität" erforderlich.

(In der Klein-Pondon Theorie lässt sich ein "verallgemeinertes Skalarprodukt" definieren:

$$\langle \psi | \phi \rangle_V \equiv \int d^3x \psi^\dagger(x) \sigma_3 \phi(x)$$

5. Invarianzen der Dirac-Gleichung

5.1 Lorentz-Kovarianz

Die Lorentz-Kovarianz wurde bereits bei der Ableitung der DE gefordert, dh. sie ist in der Form der DE berücksichtigt. Wegen der prinzipiellen Bedeutung soll sie ebenfalls erneut diskutiert werden.

Inertialsysteme sind Bezugssysteme, in denen sich Teilchen kraftfrei bewegen.

Die Lorentz-Transformationen (LT) geben an, wie sich die Koordinaten zweier Inertialsysteme ineinander transformieren. Bei gleichförmiger Bewegung hängen die Koordinaten durch eine lineare Transformation miteinander zusammen.

Die inhomogenen LT (\equiv Poincaré-Transformationen) haben die Form

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

$$x' = \Lambda x + a$$

$$x = \Lambda^{-1}(x' - a)$$

mit reellen Λ^μ_ν , a^μ .

Linearität: Die Parabelgleichung in Parameterdarstellung,

$x^\mu = e^\mu \cdot s + d^\mu$ wird durch eine solche ("affine") Transformation wieder in eine Parabelgleichung überführt.

Relativitätsprinzip: Die Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich: Es gibt kein ausgezeichnetes, "absolutes" Bezugssystem.

Aus der Forderung der Invarianz des d'Alembert-Operators,

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

ergibt sich

$$\Lambda^\lambda_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\nu = g^{\lambda\rho}, \text{ oder in Matrixform}$$

$$\boxed{\Lambda g \Lambda^T = g}$$

dies definiert die LT.

Beweis: $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \Lambda^\lambda_\mu \partial'_\lambda$

$$\partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu = \Lambda^\lambda_\mu \partial'_\lambda g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\nu \partial'_\rho \stackrel{!}{=} \partial'_\lambda g^{\lambda\rho} \partial'_\rho$$

$$\Rightarrow \Lambda^\lambda_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\nu = g^{\lambda\rho}$$

$$\stackrel{\wedge}{=} \Lambda g \Lambda^T = g \quad \checkmark$$

Poincaré-Gruppe \equiv {inhomogene Lorentz-Transformation, $a^\mu \neq 0$ }

Die Gruppe der homogenen LT enthält alle Elemente mit $a^\mu = 0$.

Inhomogene LT werden durch (Λ, a) charakterisiert, z.B.

Translationsgruppe $(\Lambda, a) = (\mathbb{1}, a)$

Drehgruppe $(\Lambda, a) = (\mathbb{D}, 0)$

Die γ -Matrizen ändern sich nicht bei LT.

Eigentliche LT: Ausschluss von Raumzeit-Translationen, Raumreflexion, Zeitspiegelung

Spezielle eigentliche LT: Ausschluss von 3d-Rotationen (wie bei der Transformation Laborsystem \leftrightarrow Schwerpunktsystem)

Aus der Forderung der Invarianz des d'Alembert-Operators folgt

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1.$$

Aus dem ME $\lambda=0, \rho=0$ der Definitivgleichung folgt

$$\Lambda^\mu_\nu g^{\mu\nu} \Lambda^\sigma_\rho = 1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_k (\Lambda^0_k)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \Lambda^0_0 \geq 1 \text{ oder } \Lambda^0_0 \leq -1$$

Das Vorzeichen der Determinante von Λ und das Vorzeichen von Λ^0_0 werden zur Klassifizierung der Elemente der Lorentz-Gruppe \mathcal{L} verwendet:

Gruppe \mathcal{L} verwendet:		$\text{sgn } \Lambda^0_0$	$\det \Lambda$
eigentliche orthochron	\mathcal{L}_+	1	+1
uneigentliche "	\mathcal{L}_-^{\uparrow}	1	-1
zeitspiegelungstüchtig	$\mathcal{L}_-^{\downarrow}$	-1	-1
Raumzeit-spiegelungstüchtig	$\mathcal{L}_+^{\downarrow}$	-1	+1

Bei einer Poincaré-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen (I) und (I') mit

$$x' = \Lambda x + a \quad (1)$$

muss entsprechend dem Relativitätsprinzip die

Dirac-Wellenfunktion ψ' aus ψ rekonstruierbar sein,
 d.h. zwischen ψ' und ψ muss ein lokales Zusammenhang gelten

$$\psi'(x') = F(\psi(x)) = F(\psi(\Lambda^{-1}(x' - a))) \quad (2)$$

Die DE in (I) wird durch (1) und (2) in eine DE in I' transformiert \approx Lorentz-kovarianz der DE (DE ist forminvariant gegenüber Poincaré-Transformationen).

Der funktionale Zusammenhang muss linear sein (damit ψ und ψ' die linearen DE genügen):

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}(x' - a))$$

$S(\Lambda)$ 4×4 Matrix

In Komponenten:

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}(\Lambda) \psi_\beta(\Lambda^{-1}(x' - a))$$

Die Lorentz-kovarianz der DE bedeutet, dass ψ' die Gleichung genügt

$$\boxed{\left(-i\gamma^\mu \partial'_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0}$$

mit $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$.

Die γ -Matrizen ändern sich bei LT nicht.

Zur Bestimmung von S wird die DE im ungestrichenen System in die DE im gestrichenen System übergeführt:

$$\left(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) \psi(x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu$$

$$S^{-1} \psi'(x') = \psi(x)$$

$$\Rightarrow \left(-i\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu + \frac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = 0$$

mult. von links mit S (Λ^ν_μ vertauscht mit γ^μ)

$$\Rightarrow -i S \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu S^{-1} \partial'_\nu \psi'(x') + \frac{mc}{\hbar} \psi'(x') = 0$$

Vergleiche mit der DE für ψ' .

\Rightarrow Bedingungsgleichung für $S(\Lambda)$:

$$\boxed{S(\Lambda)^{-1} \gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu}$$

Diese Gl. hat unendlich viele Lösungen für $S(\Lambda)$.

Eine Wellenfunktion, die sich bei LT gemäß

$$\psi' = S \psi \text{ transformiert, heißt vierkomponentig}$$

lorentz-Spinor

(Darstellungen von $S(\Lambda)$ siehe Literatur.)

5.2 Paritäts Transformation P

Übergang von einem räumlichen kartesischen Recht- zu einem Linkssystem:

$$P: t \rightarrow t' = t$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x}$$

(Raumspiegelung: recht \rightarrow links
oben \rightarrow unten)

Ist die DE

$$\left[-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right] \psi = 0$$

invariant unter dieser Transformation?

Ausatz für den Dirac-Spinor im gestrichenen System:

$$\psi'(\vec{x}', t') = S(P) \psi(\vec{x}, t)$$

können wir $S(P)$ so wählen, dass für ψ' die DE gilt?

$$(i\hbar \partial_t \equiv c \equiv 1)$$

$$\left[-i\gamma^\mu \partial'_\mu + m \right] \psi'(\vec{x}', t') = 0$$

$$= \psi'(\vec{x}', t')$$

$$S^{-1}(P) \left[-i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m \right] S(P) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

$$\underbrace{\vec{x}' = -\vec{x}}_{\Rightarrow} S^{-1}(P) \left[-i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m \right] S(P) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

Die letzte Gleichung reduziert sich auf die DE

für $\psi(\vec{x}, t)$, falls

$$S^{-1}(P) \gamma^0 S(P) = \gamma^0$$

$$S^{-1}(P) \gamma^j S(P) = -\gamma^j$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}$$

Dies lässt sich erreichen durch die Wahl

$$\boxed{S(P) \equiv \gamma^0}, \text{ denn } (\gamma^0)^{-1} \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0$$

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^{-1} \gamma^i \gamma^0 &= -(\gamma^0)^{-1} \gamma^0 \gamma^i \\ &= -\gamma^i \end{aligned}$$

und der paritätstransformierte

Dirac-Spinor ist

$$\boxed{\psi'(\vec{x}', t') = \gamma^0 \psi(\vec{x}, t) = \gamma^0 \psi(-\vec{x}', t')}$$

$\psi'(\vec{x}', t')$ erfüllt dieselbe Bewegungsgleichung (und auch dieselben Antikommutationsregeln) wie $\psi(\vec{x}, t)$.

Mit dem Dirac-adjungierten Spinor

$$\boxed{\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \cdot \gamma^0} \quad (\psi^\dagger \equiv \text{hermitesch konjugierter Spinor})$$

sind dies - bei Einsetzung der Spinoren durch Feldoperatoren

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{y}, t)\} = \{\bar{\psi}(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{y}, t)\} = 0$$

$$\{\psi(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{y}, t)\} = \gamma^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

und für ψ' genauso.

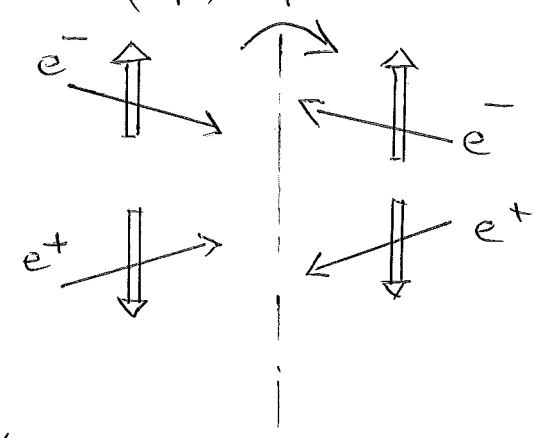
Die Spinoren $\psi(\vec{x}, t)$ und $\psi'(\vec{x}, t)$ sind äquivalent, d.h. sie gehen durch eine unitäre Transformation $U(P)$ im Zustandsraum auseinander hervor:

$$\boxed{U(P) \psi(\vec{x}, t) U^{-1}(P) = \psi'(\vec{x}, t) = \gamma^0 (\psi(\vec{x}, t))}$$

Für Ein-Teilchen-Zustände ist mit $p' = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$:

$$U(P) |e^-(\vec{p}, s)\rangle = |e^-(-\vec{p}, s)\rangle$$

$$U(P) |e^+(\vec{p}, s)\rangle = -|e^+(-\vec{p}, s)\rangle$$



wenn die Bedingung für den unitären Operator U im Raum der Elektron-Positron Zustände ist

$$U(P) a_s^+(\vec{p}) U^{-1}(P) = a_s^+(-\vec{p})$$

↑ Erzeugungsoperator für ein Elektron mit Spin s und Impuls \vec{p}

$$U(P) b_s^+(\vec{p}) U^{-1}(P) = -b_s^+(-\vec{p})$$

↑ Erzeugungsoperator für ein Positron mit Spin s und Impuls \vec{p} .

Alle nach der Dirac-Theorie haben Elektron und Positron negative Parität relativ zueinander. Das lässt sich experimentell verifizieren beim Zerfall von Positronium, dem wasserstoff-ähnlichen Bindungszustand von e^+ und e^- , in zwei Photonen, durch Messen der Winkelverteilungen.

(Der Singlett-Zustand - antiparallele Spins $S=0, M_S=0$ - heißt Para-Positronium $p-Ps, ^1S_0$, hat eine mittlere Lebensdauer von $\tau \approx 125 \text{ ps}$ und zerfällt in zwei Gammaquanten. Der Triplet-Zustand mit parallelen Spins $S=1, M_S=-1, 0, 1$ heißt Orthopositronium mit einer mittleren Lebensdauer von $\tau \approx 142 \text{ ns}$, und zerfällt i. a. in drei Photonen. Annihilation in merkmal zwei-Photonen mit einer Gesamtenergie von 1022 keV erfolgt aus dem metastabilen $2s$ -Zustand in 1.1 ps , der Zerfall in den Grundzustand ist schneller).

\Rightarrow Zu jedem Zustand freier Elektronen und Positronen gibt es daher einen paritätskonjugierten, in dem alle Impulse umgekehrt sind, alle Spins umgeändert, und für jedes Positron ein Faktor (-1) hinzugefügt ist.

Sowohl ψ als auch ψ' erfüllen die DE. Durch Beobachtungen an einem System freier Elektronen und Positronen können wir daher im Rahmen der Dirac-Theorie ein räumliches kartesisches Recht- von einem Linkssystem nicht unterscheiden.

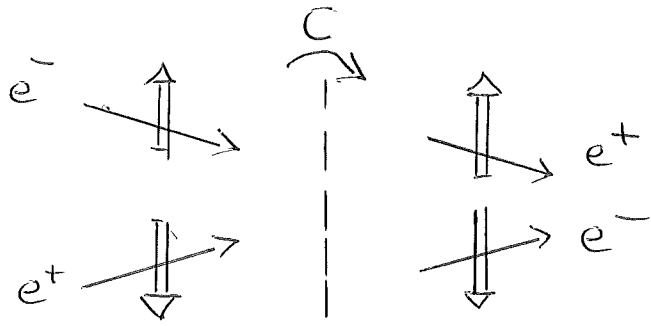
Diese Äquivalenz wird in der Natur erst durch die paritätsverletzende schwache Wechselwirkung aufgehoben. (Entdeckung der Paritätsverletzung: C. S. Wu et al. 1956/7).

5.3 Ladungskonjugations-Transformation C

Findet ein Beobachter, der die Rolle von Elektronen und Positronen vertauscht, andere Naturgesetze für die freien Teilchen?

(Nein: Im Rahmen der Dirac-Theorie ist es reine Konvention, was Elektron/Positron genannt wird).

Wir suchen zunächst nach einer Invarianz der DE, die ψ und $\bar{\psi}$ vertauscht ($\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ Dirac-adjungierter Spinor)



Elektronen werden gegen Positionen vertauscht, Spin- und Impulsvariable unverändert gelassen.

Aus der DE für ψ

ψ : beschreibt Elektronen, erzeugt Positronen
 $\bar{\psi}$: " " " " " " " " " " " "

$$[-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] \psi(x) = 0$$

folgt die DE für den Dirac-adjungierten Spinor $\bar{\psi}$

$$[-i(-\gamma^\mu)^T \partial_\mu + m] \bar{\psi}^T(x) = 0 ; (-\gamma^\mu)^T \text{ erfüllt die Antivertauschungsregeln.}$$

(mit den Matrixrelationen (Aufgabe: Prüfen durch Einsetzen)

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\bar{M} = \gamma^0 M^\dagger \gamma^0 ; \gamma^0 = \gamma^{0\dagger}, \gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = (-\gamma^j)^\dagger$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_1 M_2} = \bar{M}_2 \bar{M}_1$$

$$(\bar{\psi}_1 M \psi_2)^* = \bar{\psi}_2 \bar{M} \psi_1$$

$$\overline{\mathbb{1}} = \mathbb{1} ; \overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu$$

Wie bei der Paritäts transformation erwarten wir bei Ladungskonjugation eine Äquivalenztransformation der Restalt

$$S^{-1}(C) \gamma^\mu S(C) = (-\gamma^\mu)^T, \text{ jetzt jedoch für die transponierten } \gamma^\mu.$$

Das ist der Fall für

$$S(C) = i\gamma^2 \gamma^0$$

aus der DE für $\bar{\psi}^T$ folgt dann

$$S^{-1}(C) [-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] S(C) \bar{\psi}^T(x) = 0$$

und der ladungskonjugierte Spinor

$$\psi^c(x) = S(C) \bar{\psi}^T(x)$$

erfüllt die DE,

$$[-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] \psi^c(x) = 0,$$

und dieselben Antikommutationsregeln wie $\psi(x)$ (Nachprüfen durch Einsetzen).

Bei der Ladungskonjugations-Transformation werden Elektronen mit Positronen vertauscht, Impuls- und Spinvariable unverändert gelassen.

Die C-Invarianz ist in der Natur wie die P-Invarianz durch die schwache Wechselwirkung gebrochen.

Auch die CP-Invarianz ist gebrochen:

J. Gouni, V. Fitch, Christenson, Twlay 1964 (NP Gouni/Fitch 1980)

J.H. Christenson, J.W. Gouni, V.L. Fitch, R. Twlay (Princeton Univ.):

Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964): Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson.

EVIDENCE FOR THE 2π DECAY OF THE K_2^0 MESON*†

J. H. Christenson, J. W. Cronin,‡ V. L. Fitch,‡ and R. Turlay§

Princeton University, Princeton, New Jersey

(Received 10 July 1964)

This Letter reports the results of experimental studies designed to search for the 2π decay of the K_2^0 meson. Several previous experiments have served^{1,2} to set an upper limit of 1/300 for the fraction of K_2^0 's which decay into two charged pions. The present experiment, using spark chamber techniques, proposed to extend this limit.

In this measurement, K_2^0 mesons were produced at the Brookhaven AGS in an internal Be target bombarded by 30-BeV protons. A neutral beam was defined at 30 degrees relative to the circulating protons by a $1\frac{1}{2}$ -in. \times $1\frac{1}{2}$ -in. \times 48-in. collimator at an average distance of 14.5 ft. from the internal target. This collimator was followed by a sweeping magnet of 512 kG-in. at ~20 ft. and a 6-in. \times 6-in. \times 48-in. collimator at 55 ft. A $1\frac{1}{2}$ -in. thickness of Pb was placed in front of the first collimator to attenuate the gamma rays in the beam.

The experimental layout is shown in relation to the beam in Fig. 1. The detector for the decay products consisted of two spectrometers each composed of two spark chambers for track delineation separated by a magnetic field of 178 kG-in. The axis of each spectrometer was in the horizontal plane and each subtended an average solid angle of 0.7×10^{-2} steradians. The spark chambers were triggered on a coincidence between water Cherenkov and scintillation counters positioned immediately behind the spectrometers. When coherent K_1^0 regeneration in solid materials was being studied, an anticoincidence counter was placed immediately behind the regenerator. To minimize interactions K_2^0 decays were observed from a volume of He gas at nearly STP.

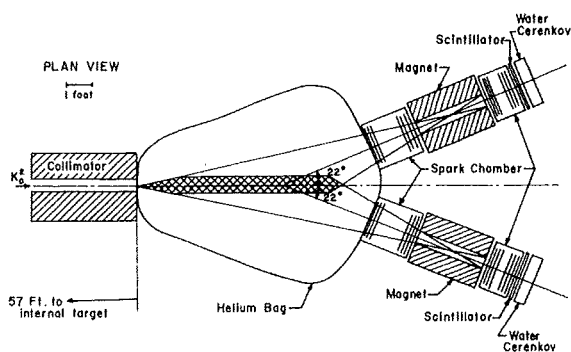


FIG. 1. Plan view of the detector arrangement.

The analysis program computed the vector momentum of each charged particle observed in the decay and the invariant mass, m^* , assuming each charged particle had the mass of the charged pion. In this detector the K_{e3} decay leads to a distribution in m^* ranging from 280 MeV to ~536 MeV; the $K_{\mu 3}$, from 280 to ~516; and the $K_{\pi 3}$, from 280 to 363 MeV. We emphasize that m^* equal to the K^0 mass is not a preferred result when the three-body decays are analyzed in this way. In addition, the vector sum of the two momenta and the angle, θ , between it and the direction of the K_2^0 beam were determined. This angle should be zero for two-body decay and is, in general, different from zero for three-body decays.

An important calibration of the apparatus and data reduction system was afforded by observing the decays of K_1^0 mesons produced by coherent regeneration in 43 gm/cm² of tungsten. Since the K_1^0 mesons produced by coherent regeneration have the same momentum and direction as the K_2^0 beam, the K_1^0 decay simulates the direct decay of the K_2^0 into two pions. The regenerator was successively placed at intervals of 11 in. along the region of the beam sensed by the detector to approximate the spatial distribution of the K_2^0 's. The K_1^0 vector momenta peaked about the forward direction with a standard deviation of 3.4 ± 0.3 milliradians. The mass distribution of these events was fitted to a Gaussian with an average mass 498.1 ± 0.4 MeV and standard deviation of 3.6 ± 0.2 MeV. The mean momentum of the K_1^0 decays was found to be 1100 MeV/c. At this momentum the beam region sensed by the detector was 300 K_1^0 decay lengths from the target.

For the K_2^0 decays in He gas, the experimental distribution in m^* is shown in Fig. 2(a). It is compared in the figure with the results of a Monte Carlo calculation which takes into account the nature of the interaction and the form factors involved in the decay, coupled with the detection efficiency of the apparatus. The computed curve shown in Fig. 2(a) is for a vector interaction, form-factor ratio $f^-/f^+ = 0.5$, and relative abundance 0.47, 0.37, and 0.16 for the K_{e3} , $K_{\mu 3}$, and $K_{\pi 3}$, respectively.³ The scalar interaction has been computed as well as the vector interaction

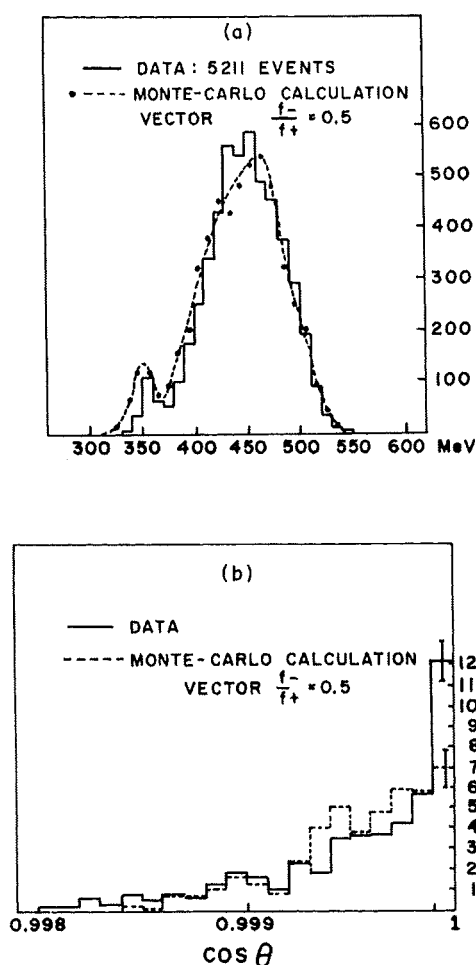


FIG. 2. (a) Experimental distribution in m^* compared with Monte Carlo calculation. The calculated distribution is normalized to the total number of observed events. (b) Angular distribution of those events in the range $490 < m^* < 510$ MeV. The calculated curve is normalized to the number of events in the complete sample.

with a form-factor ratio $f^-/f^+ = -6.6$. The data are not sensitive to the choice of form factors but do discriminate against the scalar interaction.

Figure 2(b) shows the distribution in $\cos \theta$ for those events which fall in the mass range from 490 to 510 MeV together with the corresponding result from the Monte Carlo calculation. Those events within a restricted angular range ($\cos \theta > 0.9995$) were remeasured on a somewhat more precise measuring machine and recomputed using an independent computer program. The results of these two analyses are the same within the respective resolutions. Figure 3 shows the re-

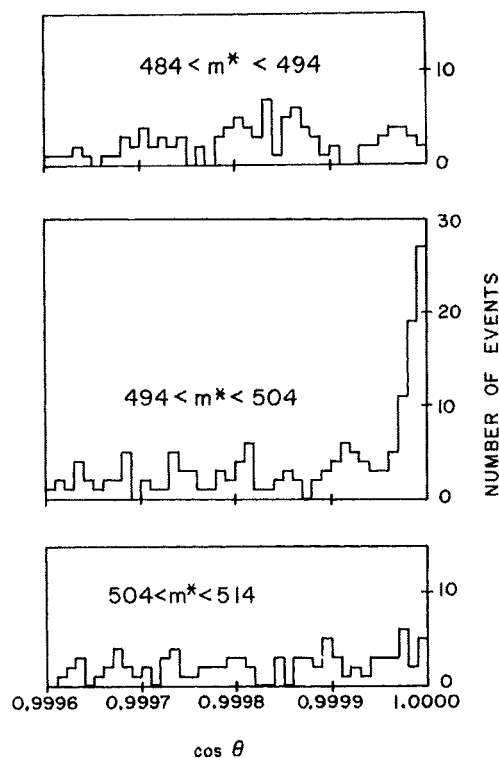


FIG. 3. Angular distribution in three mass ranges for events with $\cos \theta > 0.9995$.

sults from the more accurate measuring machine. The angular distribution from three mass ranges are shown; one above, one below, and one encompassing the mass of the neutral K meson.

The average of the distribution of masses of those events in Fig. 3 with $\cos \theta > 0.9999$ is found to be 499.1 ± 0.8 MeV. A corresponding calculation has been made for the tungsten data resulting in a mean mass of 498.1 ± 0.4 . The difference is 1.0 ± 0.9 MeV. Alternately we may take the mass of the K^0 to be known and compute the mass of the secondaries for two-body decay. Again restricting our attention to those events with $\cos \theta > 0.99999$ and assuming one of the secondaries to be a pion, the mass of the other particle is determined to be 137.4 ± 1.8 . Fitted to a Gaussian shape the forward peak in Fig. 3 has a standard deviation of 4.0 ± 0.7 milliradians to be compared with 3.4 ± 0.3 milliradians for the tungsten. The events from the He gas appear identical with those from the coherent regeneration in tungsten in both mass and angular spread.

The relative efficiency for detection of the three-body K_2^0 decays compared to that for decay to two pions is 0.23. We obtain 45 ± 9 events in

the forward peak after subtraction of background out of a total corrected sample of 22 700 K_2^0 decays.

Data taken with a hydrogen target in the beam also show evidence of a forward peak in the $\cos\theta$ distribution. After subtraction of background, 45 ± 10 events are observed in the forward peak at the K^0 mass. We estimate that ~ 10 events can be expected from coherent regeneration. The number of events remaining (35) is entirely consistent with the decay data when the relative target volumes and integrated beam intensities are taken into account. This number is substantially smaller (by more than a factor of 15) than one would expect on the basis of the data of Adair et al.⁴

We have examined many possibilities which might lead to a pronounced forward peak in the angular distribution at the K^0 mass. These include the following:

(i) K_1^0 coherent regeneration. In the He gas it is computed to be too small by a factor of $\sim 10^6$ to account for the effect observed, assuming reasonable scattering amplitudes. Anomalously large scattering amplitudes would presumably lead to exaggerated effects in liquid H_2 which are not observed. The walls of the He bag are outside the sensitive volume of the detector. The spatial distribution of the forward events is the same as that for the regular K_2^0 decays which eliminates the possibility of regeneration having occurred in the collimator.

(ii) $K_{\mu 3}$ or $K_{e 3}$ decay. A spectrum can be constructed to reproduce the observed data. It requires the preferential emission of the neutrino within a narrow band of energy, ± 4 MeV, centered at 17 ± 2 MeV ($K_{\mu 3}$) or 39 ± 2 MeV ($K_{e 3}$). This must be coupled with an appropriate angular correlation to produce the forward peak. There appears to be no reasonable mechanism which can produce such a spectrum.

(iii) Decay into $\pi^+\pi^-\gamma$. To produce the highly

singular behavior shown in Fig. 3 it would be necessary for the γ ray to have an average energy of less than 1 MeV with the available energy extending to 209 MeV. We know of no physical process which would accomplish this.

We would conclude therefore that K_2^0 decays to two pions with a branching ratio $R = (K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) / (K_2^0 \rightarrow \text{all charged modes}) = (2.0 \pm 0.4) \times 10^{-3}$ where the error is the standard deviation. As emphasized above, any alternate explanation of the effect requires highly nonphysical behavior of the three-body decays of the K_2^0 . The presence of a two-pion decay mode implies that the K_2^0 meson is not a pure eigenstate of CP . Expressed as $K_2^0 = 2^{-1/2}[(K_0 - \bar{K}_0) + \epsilon(K_0 + \bar{K}_0)]$ then $|\epsilon|^2 \cong R_T \tau_1 \tau_2$ where τ_1 and τ_2 are the K_1^0 and K_2^0 mean lives and R_T is the branching ratio including decay to two π^0 . Using $R_T = \frac{3}{2}R$ and the branching ratio quoted above, $|\epsilon| \cong 2.3 \times 10^{-3}$.

We are grateful for the full cooperation of the staff of the Brookhaven National Laboratory. We wish to thank Alan Clark for one of the computer analysis programs. R. Turlay wishes to thank the Elementary Particles Laboratory at Princeton University for its hospitality.

*Work supported by the U. S. Office of Naval Research.

[†]This work made use of computer facilities supported in part by National Science Foundation grant.

[‡]A. P. Sloan Foundation Fellow.

[§]On leave from Laboratoire de Physique Corpusculaire à Haute Energie, Centre d'Etudes Nucléaires, Saclay, France.

¹M. Bardon, K. Lande, L. M. Lederman, and W. Chinowsky, *Ann. Phys. (N. Y.)* **5**, 156 (1958).

²D. Neagu, E. O. Okonov, N. I. Petrov, A. M. Rosanova, and V. A. Rusakov, *Phys. Rev. Letters* **6**, 552 (1961).

³D. Luers, I. S. Mitra, W. J. Willis, and S. S. Yamamoto, *Phys. Rev.* **133**, B1276 (1964).

⁴R. Adair, W. Chinowsky, R. Crittenden, L. Leipuner, B. Musgrave, and F. Shively, *Phys. Rev.* **132**, 2285 (1963).

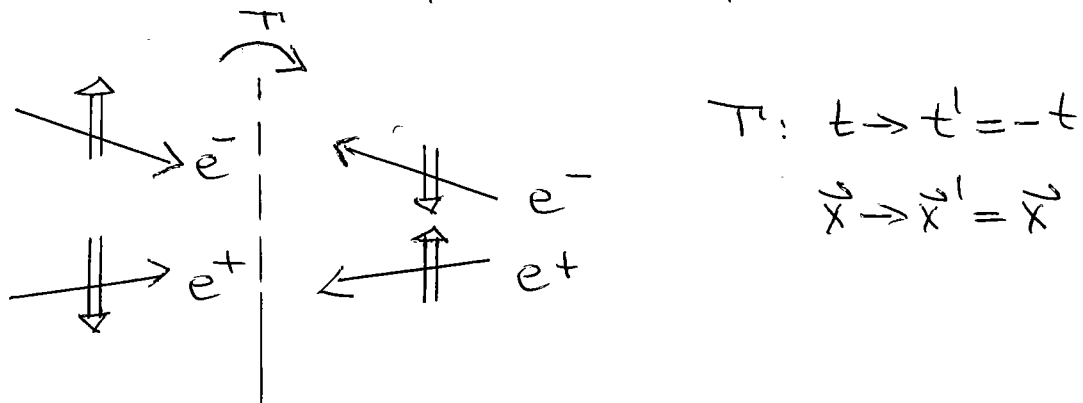
5.4 Zeitumkehr-Transformation T

kann sich durch Beobachtung freier Dirac-Teilchen die positive von der negativen Zeitrichtung unterscheiden?

⇒ Nein: freie Dirac-Teilchen zeichnen keine Zeitrichtung aus;

lassen sich als einen Dirac-Film freies Elektronen nach rechts laufen, sehen sich als einen physikalisch möglichen Zustand.

Die Zeitumkehr-Transformation eines Elektron-Positron-Zustandes dreht Impulse und Spin um:



Das Dirac-Spinor mit umgekehrtem Zeitargument $\psi(+\vec{x}, -t)$ erfüllt die Differentialgleichung ($\hbar \equiv c \equiv 1$):

$$[-i(-\gamma^0) \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m] \psi(\vec{x}, -t) = 0$$

($t \rightarrow -t$) \Rightarrow Dirac-Gleichung für $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, $\gamma^i \rightarrow \gamma^i$

Mit der Matrix

$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, die bei eigentlichen LT invariant ist und mit allen γ^μ antikommutiert,

$$\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0 \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3$$

In der Standarddarstellung des γ^μ hat γ_5 die Gestalt

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit findet man eine Transformation, die γ^0 in $-\gamma^0$ überführt und γ^i ungeändert lässt,

$$\boxed{S^1 = \gamma_5 \gamma^0} : \quad S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad S^{1-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{1-1} \gamma^0 S^1 = -\gamma^0 : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\gamma^0$$

$$S^{1-1} \gamma^i S^1 = \gamma^i \quad (\text{analog}) ; \quad \textcircled{A}$$

\Rightarrow der Spinor

$$\tilde{\psi}(\vec{x}, t) = S^1 \psi(\vec{x}, -t) = \gamma_5 \gamma^0 \psi(\vec{x}, -t) \quad \textcircled{A}$$

erfüllt die DE (prüfen durch Einsetzen).

Da die DE auch bei Ladungskonjugation invariant ist, erfüllt auch der Spinor

$$\psi'(\vec{x}, t) = S^1 \psi^c(\vec{x}, -t) = S(C) \bar{\psi}^T(\vec{x}, -t) \quad \text{die DE, mit}$$

$$S(C) = S^1 \cdot S(C) = \gamma_5 \gamma^0 \cdot i \gamma^2 \gamma^0 = -i \gamma_5 \gamma^2 = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

ψ' wird als zeitumgekehrter Spinor bezeichnet; er erfüllt die Antivertauschungsrelationen.

Es gibt keine unitäre Transformation im Fock-Raum,
die ψ in ψ' überführt; dies leitet jedoch eine
antiunitäre Transformation:

Ein Operator V ist antilinear, wenn \forall Zustände $|a\rangle, |b\rangle$
und \forall komplexen Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$V(c_1|a\rangle + c_2|b\rangle) = c_1^* V|a\rangle + c_2^* V|b\rangle.$$

Der hermitesch konjugierte Operator V^+ eines antilinearen
Operators V ist definiert als

$$\langle a|V^+|b\rangle = \langle b|V|a\rangle; V^+ \text{ ist ebenfalls antilinear.}$$

Ein Operator ist antiunitär, falls er antilinear ist und
 $V^+V = VV^+ = \mathbb{1}$ erfüllt.

Dann ist $\forall |a\rangle, |b\rangle$ und

$$|a'\rangle = V|a\rangle$$
$$|b'\rangle = V|b\rangle$$

die Relation erfüllt

$$\langle a'|b'\rangle = \langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$$

\Rightarrow im Vergleich zu einer unitären Transformation ist
also zusätzlich komplex zu konjugieren (bzw. das
"bra" mit dem "ket" zu vertauschen): Aufangs- und
Endzustände werden vertauscht.

Sei nun V unitär, und A ein beliebiger linearer Operator. Das zu A antiunitär transformierte Operator A' ist definiert als

$$A' \equiv (V A V^{-1})^\dagger$$

dh. gegenüber der unitären Transformation wird zusätzlich hermitisch konjugiert; die Zusammenhang zwischen A und A' wird linear:

für eine beliebige komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$(c \cdot A)' = c A', \text{ und für die Matrixelemente gilt}$$

$$\langle a | A | b \rangle = \langle b' | A' | a' \rangle \text{ mit den gestrichelten Zuständen wie vorher.}$$

Nun gibt es eine antiunitäre Transformation $V(T)$, so dass gilt

$$[V(T) \psi(\vec{x}, t) V^{-1}(T)]^\dagger = \psi^\dagger(\vec{x}, t) = S(T) \bar{\psi}^\dagger(\vec{x}, -t).$$

Sie dreht Impulse und Spin um, und ist die physikalische Äquivalenztransformation der Zeitumkehr: Jedem Zustand $|a\rangle$ des ersten Beobachters kann der zweite Beobachter, der die Zeit umgekehrt zählt, eben Zustand $|a'\rangle = V(T)|a\rangle$ zuordnen.

Jedes beobachtbaren Prozeß A kann als zweite

Beobachtung die Prozeß A' zueinander,

$$A' = (V A V^{-1})^\dagger,$$

die aus ψ' genau wie A aus ψ aufgebaut ist.

Für die Erwartungswerte gilt

$$\langle a | A | a \rangle = \langle a' | A | a' \rangle$$

dh. die Erwartungswerte sind in entsprechenden Zuständen identisch \Rightarrow

Für ein freies Dirac-Teilchen gilt daher Zeitumkehr-Invarianz. In der schwachen WW gibt es jedoch T-verletzende Effekte; im $k^0 - \bar{k}^0$ System ist deren experimenteller Nachweis 1998 gelungen.

Stets ist jedoch das Produkt $\Theta = CPT$ in relativistischen Feldtheorien mit beliebiger

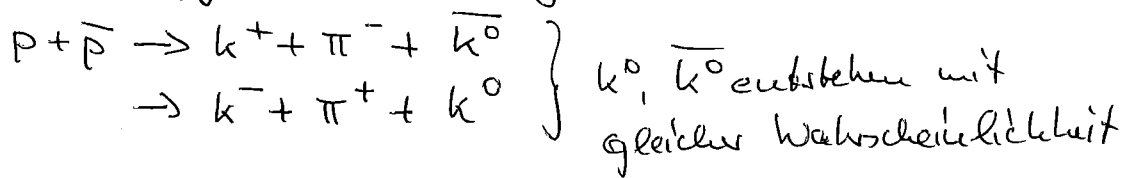
Wechselwirkung eine Invarianztransformation.

[G. Lüders, Ann. Phys. 2, 1 (1957);
 W. Pauli, in "Niels Bohr and the development of physics",
 McGraw-Hill & Pergamon Press, London (1955).]

Nachweis der T-Invarianzverletzung im K^0 - \bar{K}^0 System

CLEAR-Kollaboration, Phys. Lett. B444, 43 (1998)

"LEAR": Low Energy Antiproton Ring:



Die Strangeness des erzeugten neutralen Kaons ($\bar{K}^0: S=+1$; $K^0: S=-1$) wird anhand der Ladung des erzeugten Kaons ermittelt.

\bar{K}^0 und K^0 wandeln sich durch Oszillationen ineinander um (bereits 1961 entdeckt) und bilden eine Mischung aus Kaon- und Antikaon-Zuständen ($\Delta S=2$).

Die Verwandlung von \bar{K}^0 in K^0 und umgekehrt sind zeitgespiegelte Prozesse; wenn Zeitumkehrinvarianz gilt, werden gleich viele Antikaonen in Kaonen umgewandelt wie umgekehrt.

Exp. Ergebnis von CLEAR: Die Umwandlung eines Antikaons in ein Kaon ist um 0.66% wahrscheinlicher als umgekehrt* \Rightarrow T-Invarianz ist verletzt ($1.3 \cdot 10^6$ Ereignisse ausgewertet).

[Achtung: Ein Teil des beobachteten Effekts ist evtl. nicht auf T-Invarianzverletzung zurückzuführen, sondern auf die ebenfalls stattfindenden irreversiblen CP-verletzenden Zerfallsprozesse. Der genaue Anteil ist bisher offen].

* Die Strangeness des Endzustandes wird aus semileptonischen Zerfällen bestimmt, $K^0 \rightarrow e^+ \pi^- \nu$, $\bar{K}^0 \rightarrow e^- \pi^+ \bar{\nu}$ ($\Delta S = \Delta Q$)

6. Lösung der Dirac-Gleichung mit Zentralpotential

Betrachte ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen mit Masse m , Ladung e (z.B. Elektron $m = m_e$, $e = -e_0$) in einem statischen Zentralfeld mit $\vec{A} = 0$,

$V(r) = e\phi(r)$ potentielle Energie. (Beispiel: H-Atom, $V(r) = -\frac{e^2}{r}$)

In der DE für den statischen Fall,

$H_D \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$; ψ 4-komp. Spinor ist dann der Dirac-Operator

$$H_D = c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc^2 + V(r).$$

Lösung der DE durch Trennung der Variablen.

Dazu: Suche Operatoren, die mit H_D vertauschen, so dass sie "guten" Quantenzahlen entsprechen.

In der unrelativistischen Theorie kommt es als Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

eines spinlosen Teilchens der Masse m im Zentralfeld $V(r)$ mit jeder kartesischen Komponente des

Drehimpulsoperators,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \text{ und mit } L^2.$$

$\Rightarrow \exists$ simultane Eigenzustände der Operatoren

H, L^2, L_z mit Eigenwerten

$E, l(l+1)\hbar^2, m_l\hbar$.

In der Dirac-Theorie kommutieren jedoch weder \vec{L} noch L^2 mit H_D ; vielmehr ist

$$[H_D, \vec{L}] = -i\hbar c (\vec{\alpha} \times \vec{p})$$

und analog für den Spin-Operator mit

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}; \quad S^2 \chi = s(s+1)\hbar^2 \chi, \quad s = \frac{1}{2}$$

S_x, S_y, S_z haben je zwei mögliche Eigenwerte $\pm \frac{\hbar}{2}$

Die kartesischen Komponenten von \vec{S} vertauschen jeweils mit den kartesischen Komponenten von \vec{L} , und

$$[H_D, \vec{S}] = i\hbar c (\vec{\alpha} \times \vec{p}).$$

Der Gesamtdrehimpuls-Operator ist

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, mit den üblichen Drehimpuls-Vertauschungsregeln, und

$$[\vec{J}^2, \vec{J}] = 0: \quad \vec{J}^2 \text{ kommutiert mit jeder kart. Komponente von } \vec{J}.$$

$\Rightarrow \exists$ simultane Eigenfunktionen von \vec{J}^2 , und einer Komponente von \vec{J} , die wir als J_z wählen,

\vec{J} kommutiert auch mit der Dirac-Hamiltonian,

$$[H_D, \vec{J}] = [H_D, \vec{L}] + [H_D, \vec{S}] = 0$$

(d.h. jede kartesische Komponente von \vec{J} kommutiert mit der Dirac-Hamiltonian), sowie

$$[H_D, J^2] = 0$$

\Rightarrow Existenz simultaner Eigenzustände von H_D, J^2 und J_z mit Eigenwerten $E, j(j+1)\hbar^2$ und $m_j\hbar$.

Auch der Operator

$$\boxed{\kappa = \frac{\beta}{\hbar^2} \left(J^2 - L^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right)}$$
 kommutiert mit H_D ,

(siehe B.H. Bransden & C.J. Joachain,

Quantum Mechanics, Prentice Hall 2000, pp. 704)

sowie auch der Paritätsoperator P ,

$$P \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix} \text{ mit 2-komponentigen Spinoren } \chi_A, \chi_B.$$

$\Rightarrow \chi$ ist simultane Eigenfunktion von H_D, P, J^2, J_z und κ .

Simultane Eigenfunktionen der Operatoren

L^2, S^2, J^2 und J_z sind die 'Spin-Winkel' Funktionen

y_{e, m_j}^{j, m_j} , mit der Parität $(-1)^l$.

Es ist $\chi_A \propto y_{e, \frac{1}{2}}^{j, m_j} = y_{l, \frac{1}{2}}^{l \pm \frac{1}{2}, m_j} = \begin{pmatrix} + \left[\frac{l \pm m_j + \frac{1}{2}}{2l+1} \right]^{1/2} y_{l, m_j - \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \left[\frac{l \mp m_j + \frac{1}{2}}{2l+1} \right]^{1/2} y_{l, m_j + \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$

$\chi_B \propto y_{e', \frac{1}{2}}^{j, m_j}$, $e' = l \pm 1$

$\Rightarrow l = j - \frac{1}{2} \sim e' = j + \frac{1}{2}$
 $l = j + \frac{1}{2} \sim e' = j - \frac{1}{2}$

und wir können für χ den Lösungsansatz machen

$$\chi_{E l e m_j} = r^{-1} \begin{pmatrix} P_{El e}(r) y_{l, m_j}^{j, m_j} \\ i Q_{El e}(r) y_{l', \frac{1}{2}}^{j, m_j} \end{pmatrix}$$

mit den Radialfunktionen $P_{El e}(r), Q_{El e}(r)$.

(Der Faktor i sorgt für reelle Radialgleichungen für $P_{El e}, Q_{El e}$.)

Nach einigen Rechenschritten erhält man gekoppelte DGLn 1. Ordnung für die Radialgleichungen,

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right] P_{El e}(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c} Q_{El e}(r)$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{l}{r} \right] Q_{El e}(r) = - \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c} P_{El e}(r)$$

Analog zur radialen Schrödinger-Gleichung in der nichtrelativistischen Theorie.

Durch Eliminieren von $Q_{Elk}(r)$ folgt eine DGL 2. Ordnung für $P_{Elk}(r)$,

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{A'}{A} \frac{d}{dr} + \left(AB + \frac{A'}{A} \frac{l}{r} - \frac{l(l-1)}{r^2} \right) \right] P_{Elk}(r) = 0$$

mit $A(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c}$, $A' = \frac{dA}{dr}$

$$B(r) = \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c}$$

Für das Coulombproblem in wasserstoff-ähnlichen Atomen mit Potential

$$V(r) = - \frac{Ze^2}{r} = - \frac{Z\alpha}{r}$$

lassen sich die gekoppelten Gleichungen schreiben als

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right] P_{Elk}(r) = \left[\frac{mc}{\hbar} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) + \frac{Z\alpha}{r} \right] Q_{Elk}(r)$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{l}{r} \right] Q_{Elk}(r) = \left[\frac{mc}{\hbar} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) - \frac{Z\alpha}{r} \right] P_{Elk}(r)$$

Übergang zu neuen Variablen

$$\rho = r \cdot r$$

$$r = \frac{mc}{\hbar} \left(1 - \frac{E^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2}$$

⇒ gekoppelte Gleichungen

$$\left[\frac{d}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} \right] P_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) + \frac{Z\alpha}{\rho} \right] Q_{E\kappa}(\rho)$$

$$\left[\frac{d}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} \right] Q_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) - \frac{Z\alpha}{\rho} \right] P_{E\kappa}(\rho)$$

Asymptotisches Verhalten für $\rho \rightarrow \infty$:

$$\frac{d}{d\rho} P_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) \right] Q_{E\kappa}(\rho)$$

$$\frac{d}{d\rho} Q_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) \right] P_{E\kappa}(\rho).$$

Da wir nach gebundenen Zuständen suchen, müssen

$P_{E\kappa}(\rho)$ und $Q_{E\kappa}(\rho)$ für $\rho \rightarrow \infty$ verschwinden;

die asymptotischen Gleichungen sind dann erfüllt für

$$P_{E\kappa}(\rho) = a_1 e^{-\rho}$$

$$Q_{E\kappa}(\rho) = a_2 e^{-\rho}$$

$$\text{mit } \frac{a_1}{a_2} = - \left(\frac{1 + E/mc^2}{1 - E/mc^2} \right)^{1/2}.$$

Wir suchen deshalb nach Lösungen der gekoppelten Gleichungen in der Form

$$P_{E\kappa}(\rho) = N \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right)^{1/2} e^{-\rho} f(\rho)$$

$$Q_{E\kappa}(\rho) = -N \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right)^{1/2} e^{-\rho} g(\rho),$$

mit einer Normierungskonstante N ;
 für $\rho \rightarrow \infty$ muss gelten $f(\rho), g(\rho) \rightarrow 1$.

Die Radialfunktionen werden als Potenzentwicklungen
 angesetzt,

$$f(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k \quad c_0 \neq 0$$

$$g(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} d_k \rho^k, \quad d_0 \neq 0.$$

Einsetzen in die Radialgleichungen, und Koeffizienten-
 vergleich ergibt eine Folge von Gleichungen; aus der
 ersten folgt die Relation

$$s = \pm (l^2 - z^2 a^2)^{1/2}$$

Damit die Radialfunktionen am Ursprung $\rho=0$
 regulär bleiben, muss das positive Vorzeichen
 gewählt werden.

Die folgenden Gleichungen ergeben Rekursionsrelationen
 für die Koeffizienten $c_1, d_1, \dots, c_n, d_n, \dots$.

Um die asymptotische Randbedingung zu erfüllen,
 dass $P_{Elr}(\rho)$ und $Q_{Elr}(\rho)$ im Unendlichen verschwinden,
 müssen die Potenzentwicklungen abbrechen
 (Argumentation wie in der nichtrelativistischen
 Theorie, und in der Klein-Gordon-Theorie).

Dies ist nur für bestimmte Energiewerte möglich;
die DIRAC-Energieeigenwerte

$$E_{nj}^D = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n-j-1/2 + [(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Durch Entwicklung nach $(Z\alpha)^2$ folgt

$$E_{nj}^D \approx mc^2 \left[1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{(Z\alpha)^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]$$

und nach Subtraktion der Ruheenergie mc^2 erhält man
die Energieeigenwerte

$$E_{nj} = E_{nj}^D - mc^2 =$$

$$E_{nj} = -E_n^{(0)} \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]$$

mit dem nichtrelativistischen Schrödinger-Energieeigenwert $E_n^{(0)}$,

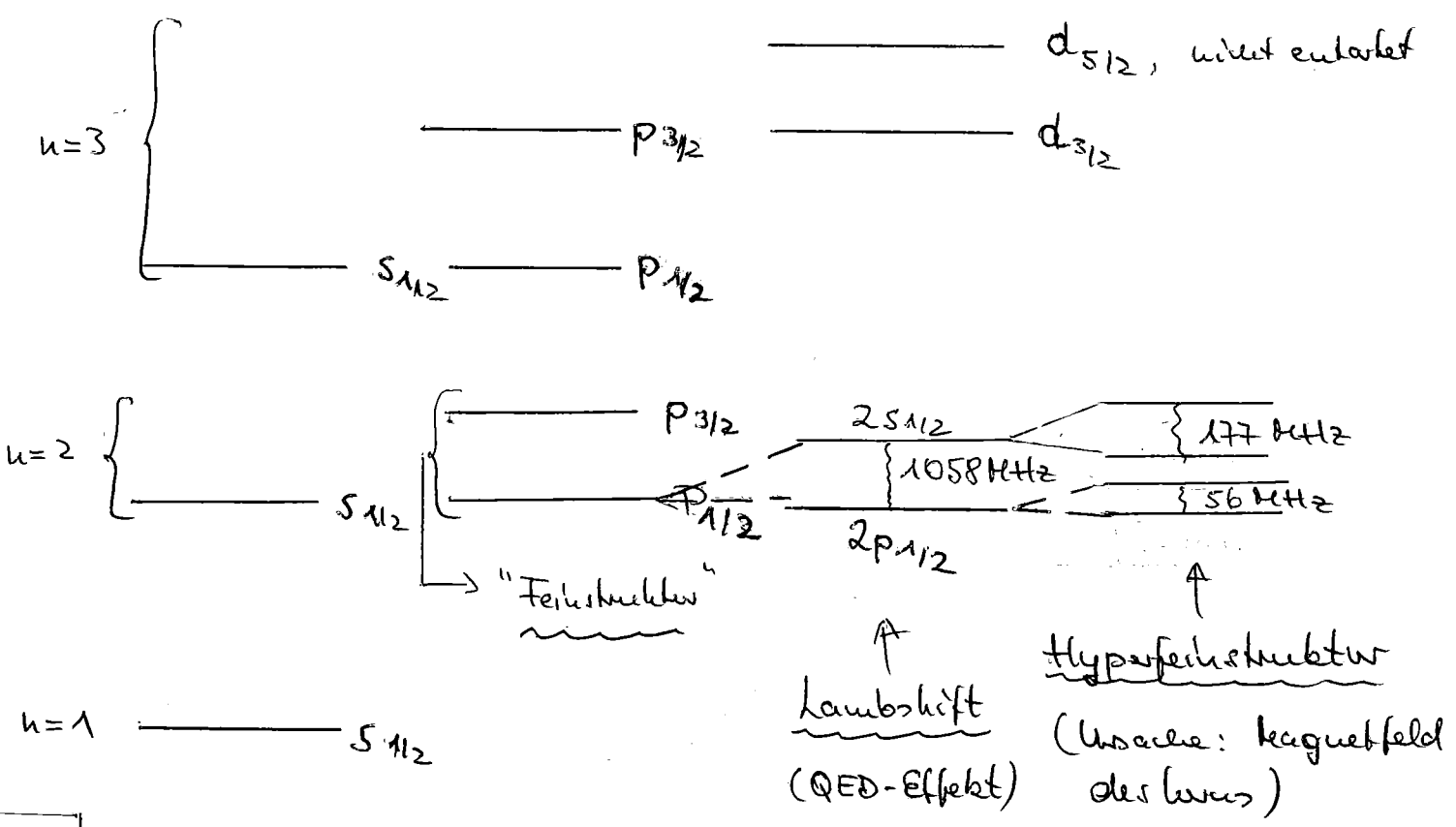
$$E_n^{(0)} = \frac{mc^2(Z\alpha)^2}{2n^2}, \quad \text{da nur von der Hauptquantenzahl } n$$

abhängt. In der Dirac-Theorie spalten diese Niveaus
in eine Feinstruktur von n unterschiedlichen Niveaus
 E_{nj} auf, mit $j = 1/2, 3/2, \dots, n-1/2$ - als Folge der
relativistischen Effekte.

In der Dirac-Theorie sind zwei Niveaus mit gleichem
 (n, j) auch dann entartet, wenn sie unterschiedlichen
Bahndrehimpuls haben ($l = j \pm 1/2$: z.B. $2s_{1/2}, 2p_{1/2}$).

Die einzigen nichtentarteten Niveaus sind
 $1s_{1/2}, 2p_{3/2}, 3d_{5/2}, \dots$

Termenschema vom Wasserstoff (nicht maßstabgerecht)



"Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method", *Phys. Rev.* **72**, 241 (1947)

Beim gebundenen Elektron ergeben sich relativistische Korrekturen zu $g_e^{Dirac} = 2$ für das freie Elektron, die G. Breit erstmals 1928 berechnet hat, sowie QED Korrekturen (aufgrund der Bindung).

Die Dirac-Theorie wurde in zahlreichen spektroskopischen Untersuchungen an Wasserstoff und wasserstoff-ähnlichen Ionen (v.a. He^+) getestet. Man fand 1937/38 experimentelle Anzeichen, dass die $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ Niveaus nicht exakt übereinstimmen; aber durch die Dopplerverbreiterung der Niveaus blieb die Lage unklar. Erst 1947 konnten W.E. Lamb und R.C. Retherford mit Mikrowellen-Techniken einen Radiofrequenz-Übergang zwischen $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ induzieren, und die "Lamb-Verchiebung" von 1058 MHz bestimmen: Ausgangspunkt der Entwicklung der Quantenelektrodynamik (QED), eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien.

Bestimmung der Lambshift (nichtrelat. Approximation)

Die kleine Differenz der $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ Energieniveaus von ≈ 1058 MHz im H-Atom heißt nach Willis Lamb (1913-2008) Lambshift. Nach Dirac sollten beide Niveaus die gleiche Energie haben, während die Wechselwirkung zwischen Elektron und Vakuum eine Verschiebung bewirkt. Die Messung (1947) der Verschiebung durch Lamb und Retherford war der Auslöser für die Entwicklung der Renormierung im QED-Rahmen durch Schwinger, Feynman und Dyson.

Hier Bethe (s. Video!) gab 1947 eine ^(die erste) heuristische Ableitung der Lambshift; die folgende Darstellung beruht auf H.O. Scully & H.S. Zehabiny, "Quantum

Optics", CUP 1997 [cf. H.A. Bethe, Phys. Rev. 72, 339 (1947)]

Die mit dem Vakuum assoziierten Fluktuationen der elektrischen und magnetischen Felder "stören" das Coulombpotential des Kerns, in dem sich die Elektron bewegt. Dadurch fluktuiert auch die räumliche Position der Elektron, und erklärt so indirekt die Energiewerschiebung.

Die dadurch hervorgerufene Differenz der potentiellen Energie ist

$$\Delta V = V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V + \frac{1}{2} (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 V(\vec{r}) + \dots$$

Die Fluktuationen sind isotrop,

$$\langle \delta\vec{r} \rangle_{\text{vac}} = 0$$

$$\langle (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 \rangle_{\text{vac}} = \frac{1}{3} \langle (\delta\vec{r})^2 \rangle_{\text{vac}} \nabla^2$$

und wir erhalten für die mittlere Differenz der potentiellen Energie

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{1}{6} \langle (\delta\vec{r})^2 \rangle_{\text{vac}} \langle \nabla^2 \left(\frac{-e^2}{r} \right) \rangle$$

Die klassische Bewegungsgleichung für die Elektronen-Fluktuationen $(\delta\vec{r})_{\vec{k}}$, die durch das Feld mit Wellenvektor \vec{k} und Frequenz ω ausgelöst werden, ist

$$\boxed{m \frac{d^2}{dt^2} (\delta\vec{r})_{\vec{k}} = -e E_{\vec{k}}}$$

dabei muss die Frequenz ω größer als ω_0 im Bohr-Orbit sein,

$$\omega > \frac{\pi c}{a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

$$(\omega = c k) : k > \frac{\pi}{a_0}$$

Für ein mit ω oszillierendes Feld

$$\delta r(t) \simeq \delta r(0) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

$k =$ (wellen-) Wellenzahl:
[In der Spektroskopie ist $k = \frac{1}{\lambda}$, bekannt als Wellenlänge!]

$$\Rightarrow (\delta r)_{\vec{k}} \simeq \frac{e}{m c^2 k^2} E_{\vec{k}} = \frac{e}{m c^2 k^2} E_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \text{h.c.} \right]$$

Summation über \vec{k} ergibt

$$\begin{aligned} \langle (\delta r^2)^2 \rangle_{vac} &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \langle 0 | (E_{\vec{k}})^2 | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \cdot E_{\vec{k}}^2 \end{aligned}$$

mit $E_{\vec{k}} = \left(\frac{\hbar c k \cdot 2\pi}{V} \right)^{1/2}$

Da \vec{k} kontinuierlich ist, wird aus der Summe ein Integral,

$$\begin{aligned} \langle (\delta r^2)^2 \rangle_{vac} &= 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \int dk \cdot k^2 \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \frac{\hbar c k \cdot 2\pi}{V} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int \frac{dk}{k} \end{aligned}$$

Ohne Grenzen überpruft das Integral. Es muss jedoch gelten (s.o.) $k > \frac{\pi}{a_0}$. Ferner muss die Wellenlänge größer als die Compton-Wellenlänge des Elektrons sein,

$$\begin{aligned} \lambda > \lambda_e = \frac{\hbar}{mc}, \text{ oder } k < \frac{mc}{\hbar} \\ \left(\lambda_e = \frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{2\pi mc} \right) \end{aligned}$$

Dies definiert obere und untere Grenzen des Integrals,

$$\int_{\frac{\pi \hbar}{a_0}}^{\frac{mc}{\hbar}} \frac{dk}{k} = \ln \left(\frac{mc \cdot a_0}{\hbar \cdot \pi} \right) = \ln \left(\frac{mc \hbar^2}{\hbar \pi m e^2} \right) = \ln \left(\frac{\hbar c}{\pi e^2} \right)$$

so dass

$$\langle (\nabla^2)^2 \rangle_{vac} \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \ln \left(\frac{\hbar c}{\pi e^2} \right)$$

Im Coulombpotential (s.o.),

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \left(-\frac{e^2}{r} \right) \rangle_{at} &= -e^2 \int d^3r \psi^*(\vec{r}) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \psi(\vec{r}) = \\ &= 4\pi \cdot e^2 |\psi(0)|^2 \\ & \left[\text{mit } \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \right] \end{aligned}$$

Für p-Orbitale verschwindet die nichtrelativistische Wellenfunktion am Ursprung, so dass es keine (im Rahmen dieser Abschätzung) Energieverschiebung gibt. Für s-Orbitale ist der Wert der Wellenfunktion am Ursprung

$$\psi_{2s}(0) = \frac{1}{(8\pi a_0^3)^{1/2}} =$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \frac{\hbar}{me^2} \approx 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.5 \cdot 10^5 \text{ fm}$

$$\Rightarrow \langle \nabla^2 \left(-\frac{e^2}{r} \right) \rangle_{at} = \frac{4\pi e^2}{8\pi a_0^3} = \frac{e^2}{2a_0^3}$$

und der Unterschied in der potentiellen Energie wird

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{\hbar}{\pi e^2} \right) \cdot \frac{e^2}{2 \cdot a_0^3}$$

$$\approx \underbrace{0.11 \cdot \frac{1}{137}}_{137} \cdot \underbrace{\left(386 \text{ fm} \right)^2}_{3.78} \cdot \ln \left(\frac{137}{\pi} \right)^{\circledast} \cdot \frac{1}{2 \cdot 137 \cdot (0.5 \cdot 10^5 \text{ fm})^3}$$

$$= 119,6 \cdot 3.78 \cdot \frac{197,32}{34,25 \cdot 10^{15}} \text{ MeV} = 2603,9 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \approx 260 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$

[* Für $\ln(137) \Rightarrow \langle \Delta V \rangle = 818,7 \text{ MHz} \hat{=} \underline{629 \text{ MHz}}$

Dieser Wert ist etwa in der Präzisionsordnung des experimentellen Wertes von 1058 MHz (Bitte die Vorfaktoren nochmals prüfen).

Im Rahmen der QED ist die Lambshift ein 1-loop Effekt, der durch Emission und Re-Absorption virtueller Photonen im Kernfeld zustande kommt.

Das Feld ist in der QED quantisiert, und (ähnlich wie beim harmonischen Oszillator in der QM) ist der niedrigste Energiezustand nicht bei $E=0$: Nullpunktsoszillationen, da Elektron macht rasche oszillatorische Bewegungen im Feld; es wird über einen Bereich $\pm \delta r$ "verschmiert".

In der QED wird der Ausdruck für die Lambshift bei s-Zuständen ($l=0$) - sie werden "angehoben", d.h. sind durch die Lambshift schwächer gebunden -

$$\Delta E_{\text{Lamb}}^{l=0} = \alpha \cdot m_e c^2 \frac{k(n,0)}{4n^3}, \quad l=0; \quad k(n,0) \approx 13$$

und bei anderen Zuständen mit $l \neq 0$:

$$\Delta E_{\text{Lamb}}^{l \neq 0} = \alpha \cdot m_e c^2 \frac{1}{4n^3} \left[k(n,l) \pm \frac{1}{\pi(j+\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2})} \right], \quad l \neq 0$$

$$\Delta(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta E_{\text{Lamb}}^{\text{QED}} = 1057.864 \pm 0.014 \text{ MHz}, \\ \Delta E_{\text{Lamb}}^{\text{exp}} = 1057.862 \pm 0.020 \text{ MHz}. \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \bar{j} = l \pm \frac{1}{2} \\ \text{mit } k(n,l) < 0.05. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe der Lambshift kann die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ auf $< 1 \text{ ppm}$ gemessen werden: Präzisionswert der QED.

7. Das Kleinsche Paradoxon

Wir untersuchen die Streuung von Elektronen an einem (unendlich ausgedehnten) Potentialsprung in der DIRAC-Theorie. Das Problem wird zunächst im Rahmen der Ein-Körper-Interpretation der DE untersucht. (Bei hinreichend hoher e^- Geschwindigkeit muss relativistisch gerechnet werden).
 Originalarbeit: O. Klein, Z. Physik 53, 157 (1929).

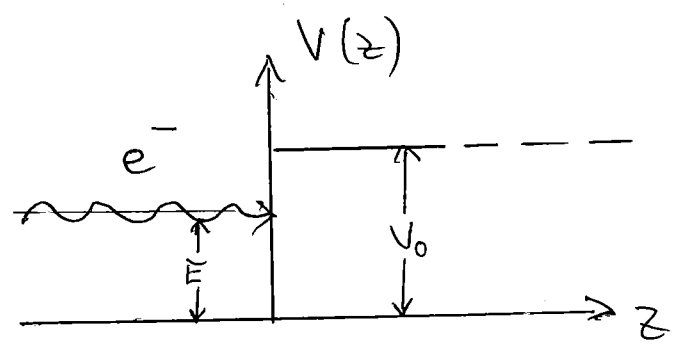
Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac.

Von O. Klein in Kopenhagen.
 (Eingegangen am 24. Dezember 1928.)

Es wird die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der neuen Diracschen Dynamik untersucht. Bei sehr großen Werten des Potentialsprungs dringen der Theorie zufolge Elektronen gegen die auf sie wirkende elektrische Kraft durch die Sprungfläche und kommen auf der anderen Seite mit einer negativen kinetischen Energie an. Dies dürfte als ein besonders schroffes Beispiel der von Dirac hervorgehobenen Schwierigkeit der relativistischen Dynamik zu betrachten sein.

Einleitung. Wie Dirac* hervorgehoben hat, besteht eine ernste Schwierigkeit für die relativistische Quantentheorie in dem Umstand, daß ein Elektron in einem Kraftfeld nach der Theorie negative Energiewerte annehmen kann, die mit den physikalisch sinnvollen positiven Energiewerten im allgemeinen durch Übergangsmöglichkeiten verbunden sind. Auch in seiner neuen, in anderer Hinsicht so erfolgreichen Behandlung der relativistischen Quantendynamik ist es ihm nicht gelungen, diese Schwierigkeit zu überwinden. In den folgenden Zeilen soll auf ein elementares Beispiel hingewiesen werden, wo diese Schwierigkeit besonders schroff zum Vorschein kommt. Es handelt sich hierbei um die Reflexion und Brechung von Elektronenwellen an einer Grenzfläche, wo das elektrostatische Potential einen Sprung hat.

Eine Elektronen-Katodenwelle propagiert mit Energie E



längs der z -Achse und trifft auf eine Potentialstufe der Höhe $V_0 > E$. Die e^- Geschwindigkeit ist vergleichbar mit c , $0.3c \leq v_e \leq c$.

Für eine freie Elektron gilt

$$(E/c)^2 = \vec{p}^2 + m^2 c^2$$

Im Gegenwart des Potentials ist

$$\left(\frac{E-V_0}{c}\right)^2 = \vec{p}^2 + m^2 c^2, \quad \text{mit dem Elektronenimpuls } \vec{p} \text{ im Potential}$$

Die DE ist dann (stationärer Fall) $0 = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c + \frac{e\phi}{c}$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{E-e\phi}{c} - \beta m c \right\} \psi + i \hbar \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0$$

und die adjungierte Gleichung

$$\bar{\psi} \left\{ \frac{E-e\phi}{c} - \beta m c \right\} + i \hbar \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} \alpha_k = 0$$

mit $e\phi = 0, z < 0$

$e\phi = V_0, z > 0$

und eine einlaufende Elektronenwelle $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$

$\psi_i = u_i \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p z - E t) \right\}$ wobei für $\alpha \rightarrow \alpha_z$ die DE

$$\left\{ \frac{E}{c} - \alpha p - \beta m c \right\} u_i = 0 \quad \text{mit } E > 0 \text{ für einlaufende Wellen.}$$

$$\text{mit } \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{i}{\hbar} p \psi.$$

Die Amplitude der einlaufenden Welle ist

$u_i \neq 0$, und mit $\alpha \beta + \beta \alpha_k = 0$ muss gelten

$$\frac{E}{c} = \alpha p + \beta m c$$

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 + \underbrace{(\alpha\beta + \beta\alpha)}_{=0} p m c$$

Der Impuls der reflektierten Welle ist $-p$,
der Impuls der transmittierten Welle ist $\hat{p} \equiv \hat{p}$ (in z-Richtung)
mit $\left(\frac{E-V_0}{c}\right)^2 = \hat{p}^2 + m^2 c^2$.

Für kleines V_0 ist \hat{p} positiv, und

$$\psi_r = u_r \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(-p z - E t)\right\}$$

$$\psi_t = u_t \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\hat{p} z - E t)\right\}$$

und aus der DE folgt mit $p \rightarrow -p$

$$\left\{\frac{E}{c} + \alpha p - \beta m c\right\} u_r = 0, \text{ und mit } p \rightarrow \hat{p}$$

$$\left\{\frac{E-V_0}{c} - \alpha \hat{p} - \beta m c\right\} u_t = 0.$$

Die Gesamtwellenfunktion muss kontinuierlich
an der Grenzfläche sein, d.h. für $z=0$

$$u_i + u_r = u_t$$

Daraus folgt mit der Gleichung für die einlaufende
Welle u_i : $\left(\frac{E}{c} - \alpha p - \beta m c\right) u_i = 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{E}{c} - \beta m c\right) u_i = \alpha p u_i$$

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) u_i = \alpha p u_i$$

und mit den Gleichungen für reflektierte und transmittierte Welle

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) u_r = -\alpha p \cdot u_r$$

$$\left(\frac{E - v_0}{c} - \beta mc\right) (u_i + u_r) = \alpha \hat{p} (u_i + u_r)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) (u_i + u_r) = \left(\frac{v_0}{c} + \alpha \hat{p}\right) (u_i + u_r)$$

subtrahiere aus den ersten beiden Gleichungen durch Addition

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) (u_i + u_r) = \alpha p (u_i - u_r)$$

so dass nach Gleichsetzen der rechten Seiten folgt

$$\left(\frac{v_0}{c} + \alpha \hat{p}\right) (u_i + u_r) = \alpha p (u_i - u_r)$$

oder

$$\left[\frac{v_0}{c} + \alpha (p + \hat{p})\right] u_r = -\left[\frac{v_0}{c} - \alpha (p - \hat{p})\right] u_i$$

Multipliziere beide Seiten mit $\frac{v_0}{c} - \alpha (p + \hat{p})$, benutze $\alpha^2 = 1$, u. die Energie-Impuls-Beziehung $\left(\frac{E - v_0}{c}\right)^2 = \hat{p}^2 + m^2 c^2$; $\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$

$$u_r = \frac{(2v_0/c)(-E/c + \alpha p)}{v_0^2/c^2 - (p + \hat{p})^2} u_i \equiv r u_i$$

und analog für die adjungierte Amplitude der reflektierten Welle,

$$u_r^+ = r u_i^+$$

⇒ Wahrscheinlichkeitsdichte für die reflektierte Welle:

$$u_r^+ u_r = \left[\frac{2V_0/c}{v_0^2/c^2 - (p+\hat{p})^2} \right]^2 u_i^+ \left[-\frac{E}{c} + \alpha p \right]^2 u_i.$$

Aus den Bewegungsgleichungen für u_i und u_i^+ folgt die Identität (Aufgabe)

$$c u_i^+ \alpha u_i = \frac{pc^2}{E} u_i^+ u_i$$

so dass wir die Amplitude der reflektierten Welle als Anteil R der Amplitude der einlaufenden

Welle schreiben können: $(p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2)$

$$\begin{aligned} \underline{u_r^+ u_r} &= \left[\frac{2V_0/c}{v_0^2/c^2 - (p+\hat{p})^2} \right]^2 \left[\left(\frac{E^2}{c^2} + p^2 \right) u_i^+ u_i - \frac{2Ep}{c} u_i^+ \alpha u_i \right] \\ &= \left[\frac{2V_0 m}{v_0^2/c^2 - (p+\hat{p})^2} \right]^2 u_i^+ u_i \equiv \underline{R u_i^+ u_i} \end{aligned}$$

so dass R der Anteil der reflektierten Elektronen ist.

Für $V_0 = 0 \Rightarrow R = 0$; alle Elektronen laufen durch⁴

für $V_0 = E - mc^2$ (d.h. $\hat{p} = 0$) $\Rightarrow R = 1$: Alle Elektronen werden reflektiert.

Für noch größeren $V_0 > E - mc^2$ wird \hat{p} imaginär.

Wir setzen dann

$$\psi_t = u_t \exp\left[-\mu z - i \frac{E}{\hbar} t\right] \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

Es ist $\mu > 0$, da sonst die Dichte rechts der Barriere für $z \rightarrow \infty$ unendlich groß würde.

Andererseits ist mit (s.o.)

$$\psi_t = u_t \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (\hat{p} z - Et)\right\} \Rightarrow \boxed{\hat{p} = i\hbar\mu}$$

$$\Rightarrow u_r = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \alpha p)}{V_0^2/c^2 - (p + i\hbar\mu)^2} u_i$$

$$u_r^+ = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \alpha p)}{V_0^2/c^2 - (p - i\hbar\mu)^2} u_i^+$$

$$\Rightarrow u_r^+ u_r = \frac{(2V_0/c)^2 (E/c^2 - p^2)}{[(V_0/c + p)^2 + \mu^2 \hbar^2][(V_0/c - p)^2 + \mu^2 \hbar^2]} u_i^+ u_i \equiv R u_i^+ u_i$$

Mit den Energie-Impuls-Beziehungen

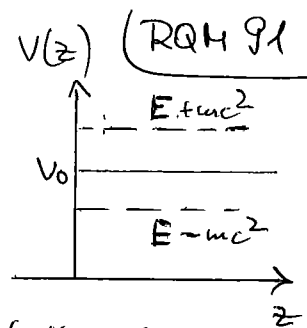
$$\left[\frac{(E - V_0)}{c}\right]^2 = p^2 + m^2 c^2, \quad \frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \quad \text{folgt}$$

$$\hat{p}^2 = p^2 - \frac{V_0(2E - V_0)}{c^2}, \quad \text{und da } \hat{p}^2 = -\mu^2 \hbar^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_0}{c} + p\right)^2 + \mu^2 \hbar^2 = 2 \frac{V_0}{c} \left(\frac{E}{c} + p\right) \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_r^+ u_r = u_i^+ u_i}$$

\Rightarrow Für $E + mc^2 > V_0 > E - mc^2$ ist das an der
 Potentialschwelle reflektierte Strom ebenfalls
 gleich dem einfallenden.



Hinter der Schwelle gibt es eine exponentiell abfallende
 Lösung.

Bei zunehmendem V_0 wird \hat{p} - und damit μ wegen
 $\hat{p} = i\hbar\mu$ - erst größer, erreicht bei $E = V_0$ einen
Maximalwert [wegen $\hat{p}^2 = p^2 - \frac{V_0(2E - V_0)}{c^2}$], und

fällt dann wieder ab; für $V_0 = E + mc^2$ wird $\mu = 0$.

Für $V_0 > E + mc^2$ wird \hat{p} wieder reell, jedoch ist
 die kinetische Energie $E - V_0$ hier negativ, so dass
 die Region rechts der Schwelle klassisch verboten ist.

Quantenmechanisch kann ein Anteil der Welle

in einem Potentialwall eindringen (analog zu nichtrel. QM,
 jedoch hier bei rel. Energien),
 \Rightarrow andere phys. Verhalten!

Bei $V_0 = E + mc^2$ war der Reflexionskoeffizient $R = 1$
 (\equiv Totalreflexion); für weiteres anziehendes V_0 nimmt
 er ab bis zum Minimalwert

$$\alpha = R_{\min} = \lim_{V_0 \rightarrow \infty} R(V_0) = \frac{(E/c - p)}{(E/c + p)}$$

und da Reflexion + Transmission (β) = 1 ergeben
 muss, ist der Transmissionskoeffizient β :

$$\beta = \frac{2p}{E/c + p} \quad (\text{check } \alpha + \beta = \frac{E/c - p + 2p}{E/c + p} = 1 \checkmark)$$

Für große Elektronenimpulse p kann demnach der Bruchteil der Elektronen, der durch die Grenzfläche dringt, beträchtliche Werte annehmen:

Bei einem Impuls $p = mc$, rel. Energie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

($\hat{=}$ Elektronengeschwindigkeit $v_e = \frac{p}{E}$)

$$= \frac{mc}{\sqrt{2} mc^2} \stackrel{v \approx 1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$$

($\approx 1.4 \times$ Ruheenergie)

71% der Lichtgeschwindigkeit)

Wird der Transmissionskoeffizient

$$\beta = \frac{2p}{E/c + p} = \frac{2mc}{E/c + mc} = \frac{2}{\frac{E}{mc^2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \approx 0.83$$

d.h. 83% der einlaufenden Elektronen durchdringen die Potentialbarriere!

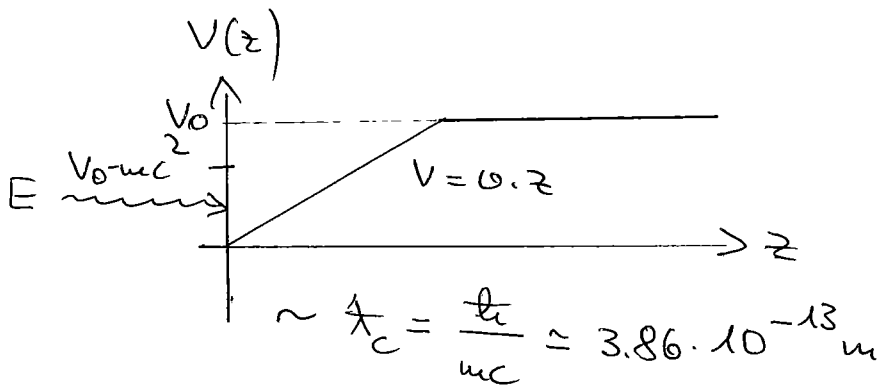
Die großen β -Werte bleiben auch dann erhalten, wenn V_0 nur einige Ruhemassen-Werte (nicht $V_0 \gg m$) beträgt. Rechnungen von F. Saubers [Z. Physik 73, 547 (1931)] haben gezeigt, dass die starke Transmission nicht stattfindet, wenn der Anstieg des Potentials allmählich ist, und (von $V=0$ bis $V=V_0$) über eine Distanz von der Größenordnung der Comptonwellenlänge erfolgt, $V = 0.2$,

$$d \approx \frac{h}{m \cdot c}$$

Denn in der Dirac-Theorie unerwartet großen Transmissionskoeffizienten nennt man das "kleinsche Paradoxon".
 [Die erforschte scharfe Barriere ist experimentell schon realisierbar.]

Lösung der DE mit dem Potential $V = \varrho z$

F. Saubert, Z. Physik 73, 547 (1931).



\Rightarrow DE:

$$\left\{ \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_0 \left(\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} + \varrho z \right) + \varrho E_0 \right\} \psi = 0$$

mit $E_0 = mc^2$, $\varrho = \frac{2\pi\hbar}{hc}$

Ansatz $\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} (x p_x + y p_y - Et)} \chi(z)$

$$\Rightarrow \left\{ \gamma_3 \frac{d}{dz} + \varrho \gamma_0 (z - E) + \varrho (E_0 + ic \gamma_1 p_x + ic \gamma_2 p_y) \right\} \chi = 0$$

\Rightarrow Lösung und Berechnung des Transmissionskoeffizienten
siehe Z. Physik (Referenz 7.0.)

Für $E > \varrho z$ haben Impuls u. Geschwindigkeit das
gleiche Vorzeichen, für
 $E < \varrho z$ das entgegengesetzte (die kinet. Energie wird
negativ).

dann wird der Transmissionskoeffizient

$$\beta = e^{-k^2 \pi}, \text{ und } \alpha = 1, \text{ für } k^2 \gg 1$$

bis auf Glieder höherer Ordnung in $1/k^2$

hier ist

$$k = \sqrt{\frac{e}{\epsilon_0}} k,$$

$$k^2 = E_0^2 + c^2(p_x^2 + p_y^2)$$

⇒ Für alle elektrischen Felder, bei denen $k^2 \gg 1$ ist (das sind alle praktisch herstellbaren Felder) ist β verschwindend klein.

Der Wert von β hängt in erster Näherung nur von der Feldstärke (der Steilheit des Anstiegs) ab; erst für $k^2 \sim 1$ erhält man endliche Werte, entsprechend Feldern von 10^{16} Volt/cm.

"Seventy years of the Klein paradox"

Für $k^2 \sim 1$ gilt $k^2 = \frac{2\pi}{hc} \left(\frac{hc^2}{\epsilon_0}\right)^2 \sim 1$

$$\frac{hc}{mc^2} \sim mc^2$$

⇒ man erhält erst endliche Werte für α , wenn der Potentialanstieg $\sim \frac{hc}{mc^2}$ auf einer Strecke von der Comptonwellenlänge von der Probenordnung der Ruheenergie wird: das ist starke Felder lassen sich bis heute nicht herstellen. (Die Bohrsche Vermutung ist damit bestätigt). Der Grenzfall eines ∞ starken Potentialanstiegs (O.bleich) kommt nichtig heraus,

$$\beta \rightarrow \frac{2cp}{E + cp}$$

zum aktuellen Stand der Forschung zum Klein-Paradoxon siehe N. Dombey, A. Calogeracos, Phys. Rep. 315, 41-58 (1999).

8. Dirac-Neutrinos: Die Weyl-Gleichung

8.1 Introduction to Neutrinos

Die Existenz eines Neutrinos postuliert W. Pauli 1930, um beim β^- -Zerfall durch schwache

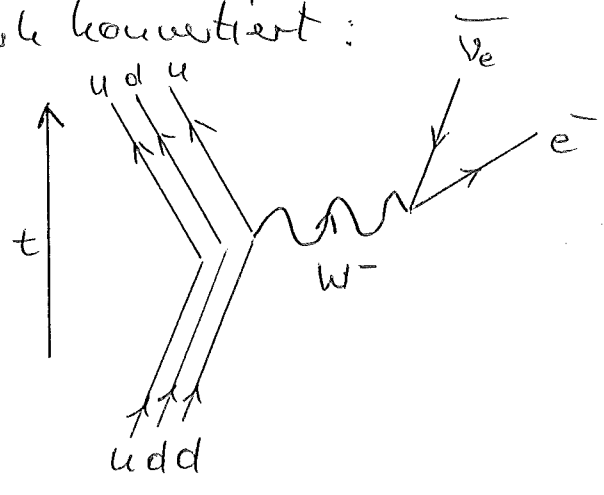
Wechselwirkung Energie- und Impulserhaltung zu gewährleisten... Dabei wird ein Neutron in ein Proton konvertiert; ein Elektron und ein Anti-Elektron-Neutrino wird ausgesandt:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

↳ neutral, unobserviert, fast masselos. Fermion mit Spin $1/2$, schwach wechselwirkend.

Auf dem Quark-Niveau wird ein d-Quark durch W^- -Emission in ein u-Quark konvertiert:

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

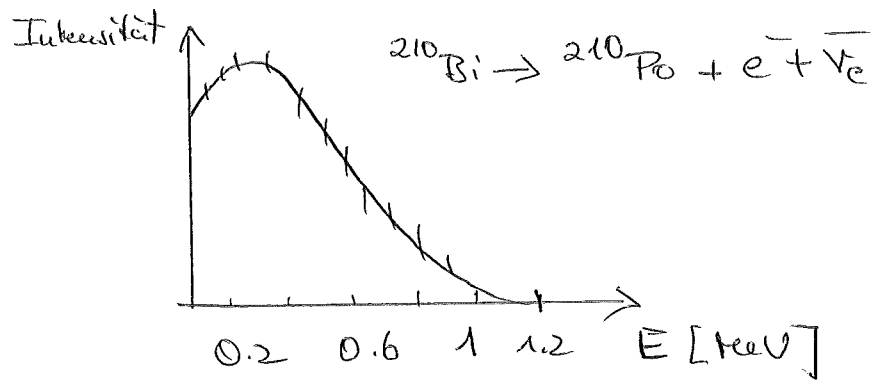


Beim β^+ -Zerfall wird unter Energiezufuhr ein Proton in ein Neutron konvertiert, und ein Positron (e^+) und Elektron-Neutrino emittiert:

$$\text{Energie} + p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

Anderes als der β^- -Zerfall kann der β^+ -Zerfall nicht "isoliert" stattfinden, weil die Neutronenmasse größer als die Protonenmasse ist \Rightarrow die Bindungsenergie des Mutterkerns muss größer als die des Tochterkerns sein.

Da die Zerfallsenergie einen festen Wert hat, das gemessene Elektronen-Energiespektrum jedoch kontinuierlich ist, muss ein weiteres Teilchen emittiert werden.



Das aus Energie- und Impulserhaltungssprinzen erforderte Antineutrino wurde 1956 von C. Cowan, F. Reines et al.

(NP Physik 1995) nachgewiesen: zunächst "Projekt Poltergeist" in Hanford, ab 1956 in Savannah River mit $\bar{\nu}_e$ aus einem Reaktor, und $0.5 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$

$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$: Nachweis beider Teilchen im Ausgangskanal = Neutrinonachweis.
"inverser β -Zerfall"

1962 L. Lederman, M. Schwartz, J. Steinberger Nachweis der ν_μ Myon-Neutrinos (NP 1988)

2000 DONUT coll. / Fermilab: ν_τ Tau-Neutrinos

$\Rightarrow \exists$ 3 Neutrino-Flavours.

In der Sonne werden ν_e Elektronen-Neutrinos erzeugt, u.a. im Prozess $1H + 1H \rightarrow 2H + e^+ + \nu_e$

Auf dem Weg zur Erde wandeln sie sich in die anderen Neutrino-Flavours um \Rightarrow alle Ruhemassen ungleich - wenn auch nur sehr wenig - von Null verschieden sein.

Für die Differenz der Massenquadrate von Elektron- und Myon-Neutrinos folgt

$$\Delta m_{sol}^2 \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}/c^2,$$

aus den Oszillationen atmosphärischer Myon-Neutrinos in Tau-Neutrinos

$$\Delta m_{atm}^2 \approx 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}/c^2.$$

Absoluter Werte für die $\bar{\nu}_e$ -Masse lassen sich bisher nur aus ${}^3\text{H}$ (Tritium) β -Zerfallsexperimenten ableiten (obere Grenzen),

$$m_{\bar{\nu}_e} < 2 \text{ eV}/c^2. \quad (\text{Ziel für das KATRIN-Experiment am KIT: } m_{\bar{\nu}_e} < 0.2 \text{ eV}/c^2)$$

In jedem Fall ist die Neutrinomasse im Vergleich zur Elektronenmasse $m_e \approx 5.11 \cdot 10^5 \text{ eV}/c^2$

vernachlässigbar klein, $\frac{m_{\bar{\nu}_e}}{m_e} \approx 7.8 \cdot 10^{-6}$.

Es ist daher sinnvoll, eine Theorie für Fermionen mit $m \neq 0$ zu untersuchen, wie sie als erster 1929 H. Weyl aufgestellt hat [H. Weyl, Z. Physik 56, 330 (1929)],

um masselose Spin $1/2$ Teilchen zu beschreiben.

Außer als die DE hat sie nur 2 Komponenten, weil sie verletzt die Paritätsinvarianz. Sie wurde daher

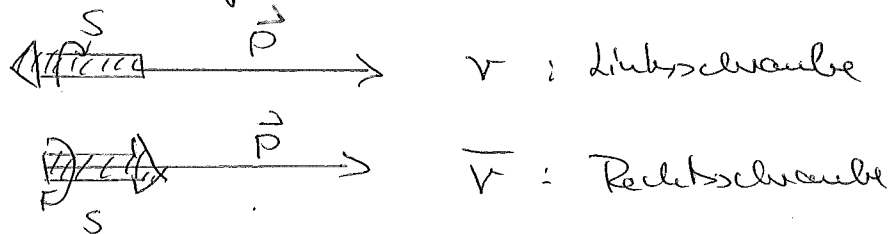
zunächst verworfen, aber nach der Entdeckung der

P.-Verletzung beim β -Zerfall von ${}^{60}\text{Co}$ durch C.S. Wu et al. Phys. Rev. 105, 1413 (1957) durch Landau,

Salam, sowie T.D. Lee und C.N. Yang [Phys. Rev. 105, 1671 (1957)]

wieder aufgegriffen.

Recente Untersuchungen des inversen β -Zerfalls haben gezeigt, dass der Spin des Neutrinos stets antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung ausgerichtet ist, der des Antineutrinos parallel zur Bewegungsrichtung



(sonst wären die Wirkungsquerschnitte um halb so groß wie die experimentellen Werte).

8.2 Die Weyl-Gleichung

Betrachte zunächst die DE für ein masseloses Teilchen:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \vec{\alpha} \vec{p} \psi(x)}$$

: der Term $+ \beta mc^2$ fällt weg

Die 3 2×2 Pauli-Matrizen σ^k erfüllen die Antikommutationsrelationen

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad ;$$

um die Forderung, auch β als wirke antikommutierende Matrix einzuführen und so Teilchen mit Masse (speziell: das Elektron) zu beschreiben, hatte bei Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen die Einführung von 4×4 -Matrizen erfordert, und von 4er Spinoren (zwei zweier-Spinoren).

Bei masselosen Teilchen lässt sich demnach
 (für Spin $\frac{1}{2}$) eine Wellengleichung für einen
 2er Spinor $\phi^+(x)$ konstruieren:

$$i\hbar \frac{\partial \phi^+}{\partial t} = c \vec{\sigma} \vec{p} \phi^+(x) \quad ; \quad \sigma^{k,1} = 2 \times 2 \text{ Pauli-Operatoren}$$

und nach Division durch $i\hbar$
 folgt $(\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla})$

$$\boxed{\frac{\partial \phi^+}{\partial t} = -c \vec{\sigma} \vec{\nabla} \phi^+(x)} \quad \text{Weyl-Gleichung (für } \phi^+)$$

Lösungen als ebene Wellen sind

$$\phi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ipx/\hbar} u^+(p)$$

wobei $p = \{p_0, \vec{p}\} = \left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\}$

$$x = \{x_0, \vec{x}\}$$

$$p \cdot x = p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

Die Neutrino-Wellenfunktionen sind dabei
 so normiert, dass alle Norm invariant unter
 Lorentz-Transformation ist.

Der 2komponentige Spinor $u^+(p)$ erfüllt die gl.

$$\boxed{p_0 u^+ = \vec{\sigma} \vec{p} u^+}$$

dh. die Lösung zu $p_0 c = E$ entspricht (je nach
 Vorzeichen der Energie E) einer bestimmten
 Orientierung des Spins $\vec{\sigma}$ relativ zur Bewegungsrichtung \vec{p} .

Wenden wir den sog. Helizitätsoperator

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$$

auf beide Seiten der Gleichung an, so erhalten wir mit der Relation

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow (p_0^2 - \vec{p}^2) u^+ = 0$$

$\Rightarrow \exists$ nichtverschwindende Lösung für u nur für

$$\boxed{p_0 = \pm |\vec{p}|} = \frac{E}{c}$$

das ist die relativistische Energie der masselosen Teilchen, die Teilchen bewegen sich dabei mit c .

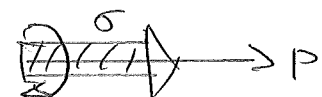
Mit der z -Achse in Jaupterichtung \vec{p} wird die Lösung von $p_0 u^+ = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u^+$:

$$\boxed{u^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

d.h. rechtshändige masselose Teilchen mit Spin in Bewegungsrichtung, also

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u^+ = \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

\Rightarrow Der Helizitätsoperator hat einen positiven Eigenwert $+1$, der Spin ist ebenfalls parallel zu \vec{p} : das entspricht einer Rechtsschraube, wenn wir in

Bewegungsrichtung (\vec{p}) blicken:  Das Neutrino ist jedoch $|\vec{p}|$ eine Linkschraube!

⇒ Für Zustände mit positiver Energie $p_0 = +|\vec{p}|$ hat die Weyl-Gleichung nur Wellen positiver Helizität als Lösung, für Zustände mit neg. Energie $p_0 = -|\vec{p}|$ nur Wellen mit neg. Helizität.

Dies ist auch in der "Lochtheorie" gültig: ^{entspricht} ~~hat~~ eine Wellenfunktion mit neg. Energie, neg. Impuls, und neg. Spinrichtung einem Antiteilchen mit pos. Energie, pos. Impuls, und pos. Spinrichtung: Eine solche Zuordnung widerspricht den Experimenten zur schwachen Wechselwirkung.

Um also masselose linkshändige Teilchen beschreiben zu können, müssen wir von der Gleichung ausgehen

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \phi^-}{\partial t} = -c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi^-(x)} \quad \text{Weyl-Gleichung (für } \phi^-)$$

Die Ersetzung $\vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$ liefert ebenfalls die Antikommutationsrelation $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$, so dass die Gleichung eine mögliche DE für masselose Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen ist.

Der Ansatz
$$\phi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ipx/\hbar} u^-(p)$$

liefert

$$p_0 u^- = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} u^-$$

$$u^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wieder kann $p_0 = \frac{E}{c}$ positiv oder negativ sein; Die Lösung ϕ^- beschreibt linkshändige masselose Teilchen mit negativer Helizität, also Neutrinos im vereinfachten Modell mit $m_\nu \equiv 0$.

Das Spin ist jetzt antiparallel zum Impuls
(linksschraube); für den Antineutrino-Zustand
mit $p_0 < 0$ ist es umgekehrt (Rechtsschraube).

β -Zerfallsexperimente zeigen, dass das Neutrino-Spin
antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung steht:

Die Helizität (oder longitudinale Polarisation) eines
Neutrinos mit positiver Energie ist negativ, bei negativer
Energie dagegen positiv.

Da es bei den Lösungen ϕ^+ des DE umgekehrt war,
lässt sich ϕ^+ mit dem Antineutrino von ϕ^- identifizieren.

Beachte jedoch, dass die Links-/Rechtshändigkeit von
Neutrino/Antineutrino nur für $m_\nu = m_{\bar{\nu}} \equiv 0$ gilt!

Die Neutrino-Stromdichte erhalten wir aus

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi^-}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi^- = 0$$

Bei Kombination von $\vec{\sigma}$ und $\mathbb{1}$ zu einem Vektor

$\sigma_\mu = \{\mathbb{1}, \vec{\sigma}\}$ lässt sich die Weyl-Gleichung

kompakter schreiben:

$$\sigma_\mu \partial^\mu \phi^- = 0$$

und die komplex konjugierte Gleichung wird

$$\partial^\mu (\phi^-)^\dagger \sigma_\mu = 0.$$

Multiplikation der ersten Gleichung von links mit $(\phi^-)^\dagger$, der zweiten von rechts mit ϕ^- und Addition ergibt

$$\partial^\mu (\phi^-)^\dagger \sigma_\mu \phi^- = 0$$

$\hat{=}$ Kontinuitätsgleichung für den 4er Strom

$j_\mu = (\phi^-)^\dagger \sigma_\mu \phi^-$, mit einer zeitartigen und raumartigen Komponente

$$j_0 = (\phi^-)^\dagger \phi^-$$

$$\vec{j} = -(\phi^-)^\dagger \vec{\sigma} \phi^-$$

Die Normierungskonstante der Neutrino Wellenfunktion folgt aus

$$\int j_0 d^3x = 1$$

Die 2-komponentige Weyl-Theorie ist nicht invariant gegenüber Paritätstransformationen:

$$P : \left. \begin{array}{l} \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\ \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \\ \vec{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ein Zustand mit Energie } p_0 = |\vec{p}|, \\ \text{Impuls } \vec{p} \\ \text{Helizität } \vec{\sigma} \vec{p} / |\vec{p}| = 1 \end{array}$$

Wird ebenfalls transformiert in einen Zustand mit $p_0 = |\vec{p}|$, Impuls $-\vec{p}$, Helizität -1 . Ein dazwischen Zustand existiert jedoch nicht in dieser 2-komponentigen Theorie masseloser Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen \Rightarrow P-Invarianz muss verletzt werden.

9. Grundzüge der Quantenelektrodynamik

9.1 Einführung

Dirac-Gleichung und Maxwell-Gleichungen liefern gemeinsam eine Theorie des Elektromagnetismus. Dabei müssen jedoch die Quantenpostulate berücksichtigt - d.h. das Feld quantisiert - werden; die daraus resultierende Quantenfeldtheorie des Elektromagnetismus heißt Quantenelektrodynamik, QED. Sie beschreibt alle Phänomene, die von geladenen Punktteilchen wie Elektronen und Positronen, und von Photonen verursacht werden. Sie umfasst Quantenphänomene in der Struktur der Atome (siehe Lehrbuch!) und Moleküle, und auch Vorgänge in der Hochenergiephysik wie die Erzeugung von Teilchen durch ein elektromagnetisches Feld. Die Berechnung des anomalen magnetischen Moments des Elektronen, (siehe S. 53) auf 10 Dezimalstellen genau ist der beste Erfolg der QED. Sie ist die am genauesten experimentell überprüfte physikalische Theorie.

Die Grundgleichungen des em. Feldes - die dann quantisiert werden müssen - sind die Maxwell-Gleichungen: (im Gauß-System), die Ampèresches, Faradaysches u. Gaußsches

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

gleich zusammenfassen und schreiben:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{keine magn. Monopole})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

ρ = Ladungsdichte
 \vec{j} = Stromdichte

\vec{E}, \vec{B} elektr. u. magnet. Feldvektor;
 mit Materie siehe ED-Vorlesung

Die Coulomb-Energie zwischen zwei Elektronen ist (Abstand r)

$$E_C = \frac{e^2}{r},$$

die Stärke der em. Wechselwirkung ist durch den dimensionslosen Faktor

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035999679(94)$$

charakterisiert, die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante.

(Bei einer hochenergetischen Teilchenkollision im Beschleuniger steigt mit wachsendem Impulsübertrag Q^2 die effektive Kopplungsstärke an, bei $Q^2 \approx m_W^2 \approx 6464 \text{ GeV}^2$ beträgt sie etwa $1/128$).

Informationen über eine mögliche zeitabhängigkeit von α sind bis heute unklar. Aus Absorptionsspektren des Lichts entfernter Quasare im Rotverschiebungsbereich $z = 3,5 \dots 0,5$

($23\% - 87\%$ des Alters des Universums) wurde eine

Abweichung $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx -0,5 \cdot 10^{-5}$ deduziert ($S_{1/2} \rightarrow P_{1/2, 3/2}$ Übergänge)

(Webb et al. 2001; Murphy et al 2003: $0,2 < z < 4,2$), d.h.

α hätte im frühen Universum einen Wert von $\sim 1/137,037$ statt $1/137,036$ gehabt.

Messungen mit Atomuhren, insbes. Frequenzverhältnisse von Quecksilber- u. Aluminiumuhren (Bouché, MIST, Boggia et al., Science 319, 1808 (2008)) ergaben im Widerspruch

dazu $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} < 1,6 \cdot 10^{-17}$ für die jährliche Variation.

$\Rightarrow \alpha$ ist mit hoher Wahrscheinlichkeit zeitlich konstant.

Die Kleinheit des Kopplungskonstanten, $\alpha \approx 0.0073$, ist entscheidend für den Erfolg der QED, bei der Reihenentwicklungen in α gemacht werden.

Beispielsweise liefert die Theorie für die Anomalie a_e des magnetischen Moments des Elektrons, (s.S.53)

$$\mu_e = \frac{1}{2} g_e \frac{e}{2mc} , \quad g_e = 2a_e + 2 \text{ exp. Wert}$$

$$a_e^{\text{exp.}} = \frac{1}{2} (g_e - 2)^{\text{exp.}} = 0.00115965218085(76) \quad \textcircled{1}$$

eine Reihenentwicklung in α mit Entwicklungskoeffizienten C_k ,

$$a_e = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} + C_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + C_4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots$$

≈ 0.00116

J. Schwinger hat 1948 als Erster den Term erster Ordnung $\alpha/2\pi$ berechnet $\textcircled{1}$. Inzwischen sind die Entwicklungskoeffizienten bis C_6 bekannt. Zusammen mit dem experimentellen

Wert $\textcircled{2}$ von g_e^{exp} (bzw. a_e^{exp}) folgt daraus der

bisher genaueste Wert für die Feinstrukturkonstante α ,

$$\alpha^{-1} = 137.035999710(96) \quad \textcircled{3}$$

[Kombiniert man die Messungen, ergibt sich (2008)

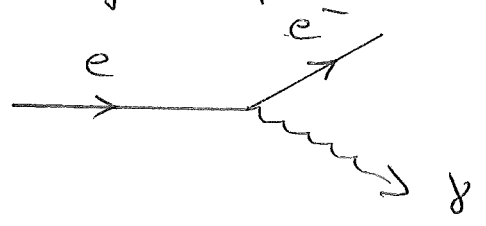
$$\alpha^{-1} = 137.035999679(94), \text{ siehe Particle Data Group]$$

$\textcircled{1}$ J. Schwinger, Phys. Rev. 73, 416L (1948).
 $\textcircled{2}$ B. Odom et al., Phys. Rev. Lett. 97, 030801 (2006)
 $\textcircled{3}$ G. Gabrielse et al., Phys. Rev. Lett. 97, 030802 (2006)

Physikalisches Bild der QED:

Klassische ED:

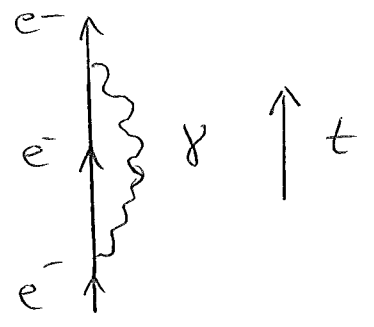
beschleunigte Ladungen emittieren em. Strahlung -
ein Elektron in Ruhe oder in geradlinig beschleunigter
Bewegung kann dagegen kein Photon emittieren
(Energie-Impuls-Erhaltung!)



In der Quantentheorie gilt jedoch die Energie-Zeit-
Unschärfenrelation,

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar,$$

so dass auch ein ruhendes Elektron ein Photon
aussenden kann: Die Verletzung der Energieerhaltung
ist erlaubt, wenn das Photon nach einer Zeit $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$
wieder absorbiert wird,



Derartige temporär existierende Photonen
nennt man "virtuelle Photonen"

In der QED ist jedes geladene Teilchen von einer
"Wolke" ausartigen virtuellen Photonen umgeben.
Die Amplitude für die γ -Emission ist $\propto e$,
die Wahrscheinlichkeit $\propto \alpha$.

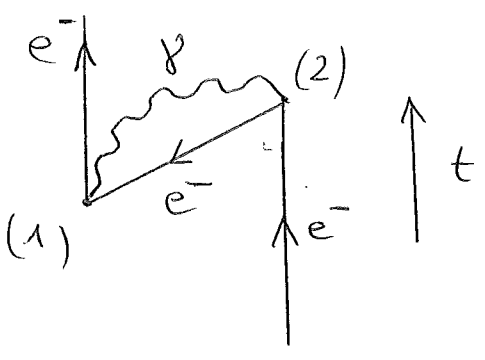
Der Dirac-Wert für das magnet. Moment der Elektron,

$g_e = 2$ entspricht einem "nackten" Elektron.

Wird ein virtuelles Photon emittiert, entsteht ein Rückstoß - und da das Elektron geladen ist, eine Stromverteilung; dieser Convectionstrom liefert einen Zusatz zum Dirac-Wert.

Da die Wahrscheinlichkeit, ein virtuelles Photon zu finden, proportional zu α , ^(ist) sind sowohl der Strom, als auch der Beitrag zu a_e in 1. Ordnung proportional zu α , wie in Schwinger's Resultat.

Der Rückstoß kann auch so erfolgen, dass das Elektron "in der Zeit zurückläuft":



bei (1) entsteht ein e^-e^+ -Paar mit Ausendung eines virtuellen Photons; das e^- läuft ins Unendliche, das e^+ wird mit dem einlaufenden e^- unter Re-Absorption des virtuellen Photons bei (2) vernichtet.

(Die Interpretation von in der Zeit zurücklaufenden Elektronenlinien als Positionen hat Stichelberg 1941 vorgeschlagen, Helv. Phys. Acta 14, 322 (1941).

Auch andere Effekte wie die Lamb-Shift und der Casimir-Effekt lassen sich durch den Einfluss der virtuellen Photonen verstehen. Die quantitative Berechnung erwies sich als schwierig: Es ergaben sich unendliche Resultate, wenn man nach der Störungstheorie wie in der nichtrel. QM vorgeht. Die von Feynman, Schwinger, und Tomonaga entwickelte Renormierungstheorie löst dieses Problem (NP 1965, "for their fundamental work in quantum electrodynamics, with deep-ploughing of consequences for the physics of elementary particles").

Die Quantenchromodynamik und die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung sind ebenfalls nach dem Muster der QED konstruiert.

9.2 Quantisierung des freien em. Feldes

In der relativistischen Formulierung werden elektrische und magnetische Feldstärke zum Feldstärketensor zusammengefasst, Ladungs- und Stromdichte zur Vierstromdichte:

$$\begin{matrix}
 \uparrow \uparrow \\
 \text{Zeile} \quad \text{Spalte}
 \end{matrix}
 \left(F_{\mu\nu} \right) = \begin{pmatrix}
 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\
 E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\
 E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\
 E_3 & -B_2 & B_1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Feldstärketensor;

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \text{ Vierstromdichte}$$

Skalares Potential ϕ und Vektorpotential \vec{A} fassen wir zum 4er Potential zusammen,

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

Die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ wird

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

Aus dem Viererpotential folgen die Felder \vec{E} und \vec{B} ,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Insbesondere ist

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_3} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2$$

$$E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_0} = -\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1$$

und der antisymmetrische Feldtensor wird

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

mit $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

und den auf der vorherigen Seite gezeigten Komponenten.
 (Dabei gibt es in A^μ noch die Eichfreiheit

Maxwell-Gleichungen

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ ist

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c} j^0$$

Die 1-Komponente von

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{c} j^1$$

und analog für die anderen Komponenten,
zusammengefasst

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}, \text{ oder } \partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

Mit der Potentialdarstellung des Feldtensors

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \text{ folgt}$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

In der sog. Lorenz-Eichung ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \dot{\phi} = 0 \quad \approx$$

$\partial_\mu A^\mu = 0$, d.h. die Divergenz des 4er Potentials
verschwindet in der L.E., und die $F^{\mu\nu}$ sind jetzt
eindeutig festgelegt.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu A^\nu &= \frac{4\pi}{c} j^\nu \\ \square A^\nu &= + \frac{4\pi}{c} j^\nu \end{aligned}}$$

$$\square = + \partial_\mu \partial^\mu = + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$$

d'Alembert-Operator

für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen.

Analog für die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0$$

$$- \partial_1 F^{32} - \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0$$

$$= + \partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} - \partial_3 F^{21} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x = 0$$

$$\Rightarrow + \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{23} = 0$$

Zusammengefasst

$$\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad \text{Bianchi-Identität}$$

(nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu$ nicht trivial: für gleiche Indices identisch erfüllt)

Dies lässt sich mit Hilfe des dualen Feldtensors $\tilde{F}^{\mu\nu}$

analog wie bei den inhomogenen Gleichungen

Zusammenfassen:

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$

↳ = 0 bei zwei gleichen Indices, sonst
 Vorzeichenänderung beim Vertauschen
 zweier Indices
 $\epsilon^{0123} = 1$, Normierung

Wir untersuchen jetzt das freie Photonfeld,
ohne äußere Quellen: $j^\nu \equiv 0$

Dann erfüllt das Vektorpotential die
el' Alembert-Gleichung

$$\square A^\mu = 0$$

In der Quantentheorie ist das eine Operatorgleichung.
Für den Feldoperator A_μ gilt dann eine Entwicklung
mit operatorwertigen Entwicklungskoeffizienten,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \cdot 2\omega} \left\{ e^{ikx} a_\mu(\vec{k}) + e^{-ikx} a_\mu^\dagger(\vec{k}) \right\}$$

wobei

$$k = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \omega = |\vec{k}|$$

$$kx = k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

und für die Vertauschungsrelationen der
Erzeugnis- und Vernichtungsoperatoren a^\dagger, a gilt:

$$[a_\mu^\dagger(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = 0$$

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu(\vec{k}')] = 0$$

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = z_{\mu\nu} (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

mit zunächst noch unbekanntem konstanten $z_{\mu\nu}$.

→ (Die Darstellung folgt hier O. Neftci, Elementar-
teilchenphysik, Vieweg 1986):

Für den Vakuumzustand im Fock-Raum gilt

$$a_\mu(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \mu, k$$

die Indizes μ, ν sind 4er Vektor-Indizes, und die konstanten $Z_{\mu\nu}$ bilden einen Lorentz-Tensor 2. Stufe. Wegen der geforderten Lorentz-Invarianz muss er ein konstanter Tensor sein; der einzige Tensor dieser Art ist ein metrischer Tensor.

$$\Rightarrow (Z_{\mu\nu}) = \pm (g_{\mu\nu}) = (+) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$\Rightarrow a_\mu^\dagger$ ($\mu=1,2,3$) ergibt - angewandt auf das Vakuum - einen Zustand positiver Norm, jedoch

$a_0^\dagger |0\rangle$ ergibt einen Zustand negativer Norm
(\Rightarrow die Wahrscheinlichkeitsinterpretation gilt nicht)

\Rightarrow die Norm ist unbestimmt.

Gupta und Bleuler (1950) haben ein Verfahren angegeben, um Zustände positiver Norm zu erzeugen, (und gleichzeitig zwei der linear unabhängigen Polarisationszustände zu eliminieren: ein reelles Photon hat nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade!).

Die Fourier-Entwicklung für den Feldoperator A_μ ,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} a_\mu^\dagger(\vec{k}) + e^{-ikx} a_\mu(\vec{k}) \right\}$$

erfüllt zunächst nur die d'Alembert-Gleichung,

$$\square A_\mu = 0 \quad \text{in Operatorform.}$$

Sie ist nur zusammen mit der Lorentz-Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen;

also muss auch die Lorentz-Bedingung in die

Quantenmechanik übertragen werden. Sie kann

jedoch nicht direkt in Operatorform gebracht werden;

man fasst stattdessen die Lorentz-Bedingung als

Wahlbedingung für Zustände:

Nur diejenigen Zustände im Fock-Raum sind

physikalisch, die die LB erfüllen:

Wir berücksichtigen nur den Teil des 4er Potentials,
 das die Annihilationsoperatoren enthält,

$$A_\mu^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{-ikx} a_\mu(\vec{k}), \quad \text{und fordern}$$

$$\partial^\mu A_\mu^{(-)}(x) | \text{physik. Zustand} \rangle = 0$$

bzw. für die Fourier-Komponenten

$$k^\mu a_\mu(\vec{k}) | \text{phys. Zustand} \rangle = 0 \quad \forall \vec{k}.$$

\Rightarrow der Erwartungswert der Divergenz der gesamten Felder $\partial^\mu A_\mu(x)$ verschwindet für beliebige physikalische Zustandsvektoren:

$$\langle \text{phys. Zustand} | \partial^\mu A_\mu(x) | \text{phys. Zustand} \rangle = 0$$

(Anteil in $\partial^\mu A_\mu(x)$ mit Erzeugungsoperatoren nach links wirken lassen!)

Der Unterraum der physikalischen Zustandsvektoren ist linear. Seine Metrik ist positiv semidefinit:

$$\langle \text{phys. Zustand} | \text{phys. Zustand} \rangle \geq 0$$

Beweis:

Wähle eine Basis für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned} \text{Einheitsvektoren } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \perp \vec{k} : \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{e}_3 = \vec{k}/|\vec{k}| = \hat{k} \end{aligned}$$

Operatoren:

$$\alpha_0^+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_0^+(\vec{k}) - \hat{k} \vec{a}^+(\vec{k})]$$

$$\alpha_1^+(\vec{k}) = \vec{e}_1 \vec{a}^+(\vec{k})$$

$$\alpha_2^+(\vec{k}) = \vec{e}_2 \vec{a}^+(\vec{k})$$

$$\alpha_3^+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_0^+(\vec{k}) + \hat{k} \vec{a}^+(\vec{k})]$$

Und aus den Vertauschungsregeln für die a_j
 folgen die VR. für die α_j :

$$[\alpha_0(\vec{k}), \alpha_0^+(\vec{k}')] = [\alpha_3(\vec{k}), \alpha_3^+(\vec{k}')] = 0$$

$$[\alpha_0(\vec{k}), \alpha_3^+(\vec{k}')] = [\alpha_3(\vec{k}), \alpha_0^+(\vec{k}')] = - (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$[\alpha_1(\vec{k}), \alpha_1^+(\vec{k}')] = [\alpha_2(\vec{k}), \alpha_2^+(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

(alle anderen Kommutatoren = 0)

Die LB als Nebenbedingung wird

$$\alpha_0(\vec{k}) |\text{phys. Zustand}\rangle = 0$$

Ein Zustandsvektor im Hilbert-Raum löst sich als
 beliebiges Produkt von Erzeugungsoperatoren angewandt
 auf das Vakuum darstellbar:

$$\alpha_1^+(\vec{k}_1) \alpha_1^+(\vec{k}_2) \dots \alpha_2^+ \dots \alpha_0^+ \dots \alpha_3^+ \dots |0\rangle$$

jedoch ist die LB dann und nur dann erfüllt,
 wenn dabei keine Operatoren α_3^+ vorkommen (wegen der
 Vertauschungsregeln).

Physikalische Zustandsvektoren sind z.B.

$$\alpha_1^+(\vec{k}) |0\rangle, \alpha_2^+(\vec{k}) |0\rangle, \alpha_0^+(\vec{k}) |0\rangle$$

sie sind zueinander orthogonal, die Längenquadrate
 sind ≥ 0 :

$$\langle 0 | \alpha_1(\vec{k}) \alpha_1^+(\vec{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\langle 0 | \alpha_2(\vec{k}) \alpha_2^+(\vec{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\langle 0 | \alpha_0(\vec{k}) \alpha_0^+(\vec{k}') | 0 \rangle = 0$$

Auch alle anderen Längenquadrate von Zustandsvektoren, die kein α_3^+ enthalten, sind ≥ 0 :

$$\langle \text{phys. Zustand} | \text{phys. Zustand} \rangle \geq 0$$

(s. Literatur zur Diskussion des Hilbert-Raumes mit positiv definiten Metrik) "Äquivalenzklassen" von Zustandsvektoren).

Mit Berücksichtigung der Quantenpostulate durch die Vertauschungsrelationen lassen sich nun Erwartungswerte physikalischer Größen berechnen.

Die Feldstärken - Erwartungswerte

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dot{\vec{A}}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{werden}$$

$$\langle \vec{B}(x) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} \langle -i\vec{k} \times [\vec{e}_1 \alpha_1^+(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2^+(\vec{k})] \rangle + e^{-ikx} \langle i\vec{k} \times [\vec{e}_1 \alpha_1(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2(\vec{k})] \rangle \right\}$$

$$\langle \vec{E}(x) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ -i\omega e^{ikx} \langle \vec{e}_1 \alpha_1^+(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2^+(\vec{k}) \rangle + i\omega e^{-ikx} \langle \vec{e}_1 \alpha_1(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2(\vec{k}) \rangle \right\}$$

Es tragen - in Übereinstimmung mit dem Experiment - nur die transversalen Freiheitsgrade der Photonen bei.

Die Operatoren für Energie und Impuls von Photonen folgen aus den klassischen Ausdrücken,

$$P^0 = \int_{t=\text{const}} d^3x \cdot \frac{1}{2} [\vec{E}^2(x) + \vec{B}^2(x)]$$

$$\vec{P} = \int_{t=\text{const}} d^3x [\vec{E}(x) \times \vec{B}(x)]$$

Mit \vec{E} und \vec{B} als Feldoperatoren lassen sich die Erwartungswerte von Energie und Impuls berechnen - jedoch ergeben sich zunächst divergente Resultate. Um sie zu vermeiden, ersetzen wir den Energieoperator durch

$$P^0 \equiv P'^0 - \langle 0 | P'^0 | 0 \rangle,$$

dh. wir wählen die Vakuumenergie als Nullpunkt der Energiezählung (das ist dh., dass gemessen werden Energie d. Änderungen).

Die Erwartungswerte des "reinen" Energieoperators sind nicht divergent.

Die Subtraktion der Vakuumenergie erfolgt automatisch, wenn wir das "normalgeordnete" Produkt der Feldoperatoren verwenden ("Doppelpunkte"): alle Erzeugungsoperatoren wirken so, als stünden sie links von allen Vernichtungsoperatoren, also z.B.

$$\boxed{: a a^\dagger : \equiv a^\dagger a}, \text{ etc}$$

"Normalprodukt"

zB gilt für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(x) \sim a^\dagger + a$$

so dass

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E}^2(x) \therefore &\sim \therefore (a^\dagger + a)(a^\dagger + a) \therefore \\ &= \therefore a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + a a^\dagger + a a \therefore \\ &= a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + a a \end{aligned}$$

und die korrekten Ausdrücke für Energie und Impuls werden

$$P^0 = \int_{t=\text{const}} d^3x \frac{1}{2} \therefore [\vec{E}^2(x) + \vec{B}^2(x)] \therefore$$

$$\vec{P} = \int_{t=\text{const}} d^3x \therefore \vec{E}(x) \times \vec{B}(x) \therefore$$

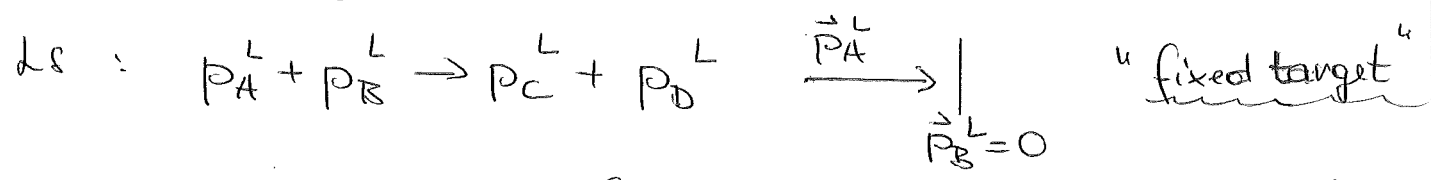
Erwartungswerte des Überpotentials sind nicht direkt beobachtbar; für das gewöhnliche Überprodukt zweier Überpotentialer ergibt sich

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-ik(x-y)}$$

mit $k = \begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ \vec{k} \end{pmatrix}$.

10. Elemente der relativistischen Streutheorie

10.1 Invarianten bei relativistischen Reaktionen



Wasserimpulserhaltung ($\hat{=}$ Energie- und Impulserhaltung):

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D$$

Mit der zusätzlichen Bedingung ($t \equiv c \equiv 1$)

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

Die Teilchen sind "auf der Massenschale":

$$p_A^2 = m_A^2, p_B^2 = m_B^2, p_C^2 = m_C^2, p_D^2 = m_D^2.$$

Man findet 3 lorentz-invariante sog. Mandelstam-Variable ein:

Das Quadrat der Schwerpunktsenergie,

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 = E_{cm}^2 = (E_A + E_B)^2 = (E_C + E_D)^2$$

sowie die folgenden Quadrate von 4er Impulstransfers

$$t = (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2$$

$$u = (p_A - p_D)^2 = (p_C - p_B)^2$$

Wegen des Constraints $p_i^2 = m_i^2$ sind die drei Mandelstam-Variable nicht unabhängig voneinander,

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

Für die invariante Größe s gilt im Schwerpunktsystem (CMS)

$$\begin{aligned}
s &= (p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - \underbrace{(\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2}_{= 0 \text{ im CMS}} \\
&= (E_A + E_B)^2
\end{aligned}$$

Im Labor-system (LS) wird dieselbe Größe mit

$$p_A^L = (E_A^L, \vec{p}_A^L)$$

$$p_B^L = (E_B^L, \vec{p}_B^L) = (m_B, 0) :$$

$$\begin{aligned}
s &= (p_A^L + p_B^L)^2 = [E_A^L + m_B]^2 - (\vec{p}_A^L)^2 = \\
&= (E_A^L)^2 + 2m_B E_A^L + m_B^2 - (\vec{p}_A^L)^2
\end{aligned}$$

und mit

$$(E_A^L)^2 - (\vec{p}_A^L)^2 = m_A^2 \Rightarrow$$

$$s = m_A^2 + m_B^2 + 2m_B E_A^L$$

Mit s ist auch die cm-Energie $\sqrt{s} \equiv E_{cm}$ relativistische invariant.

Die kinetische Energie des einfallenden Teilchens "A" ist im Laborsystem

$$k_A^L = E_A^L - m_A \Rightarrow E_A^L = k_A^L + m_A$$

$$\Rightarrow \boxed{S = (m_A + m_B)^2 + 2m_B k_A^L}$$

damit wird die kinetische Energie im Schwerpunktsystem

$$k_{cm} = \sqrt{S} - m_A - m_B = (m_A + m_B) \sqrt{1 + \frac{2m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2}} - m_A - m_B$$

und in relativistischer Näherung (uv)

$$k_A^L \ll m_A + m_B, \quad k_A \rightarrow k_A^{uv}$$

$$\Rightarrow k_{cm}^{uv} \approx (m_A + m_B) \left[1 + \frac{m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2} \right] - m_A - m_B = (m_A + m_B) \frac{m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2}$$

$$\boxed{k_{cm}^{uv} = \frac{m_B}{m_A + m_B} k_A^L}$$

(dies ist ein wohlbekanntes Ausdruck in der relativistischen Streutheorie)

für $m_A = m_B$:

$$k_{cm}^{uv}(A=B) = \frac{1}{2} k_A^L$$

Bei hohen relativistischen Energien ist \approx gleiches

$$|\vec{p}_A^L| \gg m_A, m_B$$

$$\text{und wegen } (E_A^L)^2 - (\vec{p}_A^L)^2 = m_A^2,$$

$$E_A^L = \sqrt{(\vec{p}_A^L)^2 + m_A^2}$$

$$\Rightarrow E_A^L \approx |\vec{p}_A^L|$$

$$\Rightarrow \boxed{s \approx 2m_B E_A^L \approx 2m_B |\vec{p}_A^L| \equiv E_{cm}^2}$$

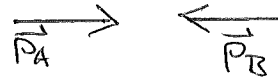
dh. die Schwerpunktenergie wächst nur mit der Wurzel des Labormomentums bei ultra-relativistischen Energien,

$$\sqrt{s} = E_{cm} \propto \sqrt{|\vec{p}_A^L|}$$

\Rightarrow bei hohen Energien sind Collider die bessere Alternative.

Beispiel: $p + p$ am LHC, $|\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = 7 \text{ TeV}/c$

$$m_p \approx 0.938 \text{ GeV}/c^2$$



$$E_A = E_B = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \stackrel{c=1}{\equiv} \sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{49 \cdot 10^6 + 0.88^2} \text{ GeV}$$

$$\approx 7000 \text{ GeV} = 7 \text{ TeV}$$

$$s = (E_A + E_B)^2 \approx 196 \cdot 10^6 \text{ GeV}^2 \Rightarrow \sqrt{s} = \underline{14 \cdot 10^3 \text{ GeV}}$$

Derselbe Wert von s erfordert mit einem festen Target einen Labormoment von $\vec{p}_A^L \longrightarrow |$

$$|\vec{p}_A^L| \approx \frac{s}{2m_p} = \frac{196 \cdot 10^6}{2 \cdot 0.938} \text{ GeV}/c \approx 104.48 \cdot 10^6 \text{ GeV}/c = \underline{104.48 \cdot 10^3 \text{ TeV}/c}$$

dh. das ~ 15000 fache des Collidermomentums, um $\sqrt{s} = 14 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ zu erreichen.



Aufgaben zu RQM-
Vorlesung

Aufgabe 1: kovarianz der Ableitungen

Zeigen Sie explizit:

Der kovariante 4-Vektor $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

behält sich unter Lorentz-Transformation

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$$

wie die Ableitungen des kovarianten 4-Vektors x^μ ,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Aufgabe 2: Pauli-Matrizen

Zeigen Sie:

(1) Aus der Hermitizität ($\sigma_i = \sigma_i^\dagger$) und Unitarität ($\sigma_i^{-1} = \overline{\sigma_i^T}$) der Pauli-Matrizen folgt

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{1}$$

(2) Die Determinanten und Spuren der Pauli-Matrizen sind

$$\det \sigma_i = -1, \quad \text{tr} \sigma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

(3) Es gilt $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \cdot \mathbb{1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Die Pauli-Matrizen erfüllen die Algebra

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \cdot \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad i, j = 1, 2, 3$$

Aufgabe 3: Klein-Gordon Gleichung (KGE)

Zeigen Sie explizit durch Einsetzen:

Es gibt zwei freie Lösungen der KGE

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] |\psi\rangle = 0$$

in Form von ebenen Wellen

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})/\hbar}$$

$$\text{mit } E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Aufgabe 4: Lokale Eichinvarianz der KGE mit Feld

Zeigen Sie: Die KGE ist lokal eichinvariant unter der Transformation

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x)$$

wenn man die Wellenfunktion ψ transformiert gemäß

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda(x)} \psi(x)$$

und den Phasenfaktor wählt als

$$\Lambda(x) = \frac{e}{\hbar c} \chi(x).$$

Aufgabe 5: Klein-Paulson Gleichung mit
Coulombpotential

Zeigen Sie: Die radiale KGE mit Potential $e\phi = -\frac{Ze^2}{r}$

$$\left[\frac{d^2}{d(\rho/2)^2} + \frac{2\lambda}{\rho/2} - 1 - \frac{l(l+1) - \rho^2}{(\rho/2)^2} \right] \rho R(\rho) = 0$$

ergibt mit dem Lösungsansatz $[l(l+1) - \rho^2 \equiv l'(l'+1)]$

$$\rho R(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{l'+1} e^{-\rho/2} w(\rho/2)$$

$$2\lambda \equiv \rho_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \cdot \frac{Ze^2}{E}$$

as. Lösung für $\rho \rightarrow 0$ / $\rho \rightarrow \infty$

die folgende Radialgleichung für $w(\rho)$:

$$\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + 2(l'+1 - \rho) \frac{dw}{d\rho} + (\rho_0 - 2(l'+1)) w = 0$$

Sie ist für $l' \rightarrow l$, $\rho_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{Ze^2}{E}$

identisch mit der Radialgleichung im Schwärzkyfall.

Aufgabe 6: Klein-Paulson Energieeigenwerte (mit Potential wie Aufg. 5)

Berechnen Sie aus der Relation

$\rho_0 = 2(N + l' + 1)$ mit den Definitionen für l' und ρ_0 aus Aufg. 5

die Energieeigenwerte:

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{\lambda^2}\right)^{-1/2}$$

Aufgabe 7: Algebraische Strukturen der Dirac-Matrizen

Zeigen Sie, dass durch zweifache Anwendung des Dirac-Operators

$$H_D = \frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta mc^2 \quad \text{in} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_D \psi$$

und Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0$$

die algebraischen Bedingungen folgen:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2 \delta^{ij} \mathbb{1}$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0$$

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$$

Aufgabe 8: Standarddarstellung der Dirac-Matrizen

Prüfen Sie in der sog. Dirac-Darstellung

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit den Pauli-Matrizen } \sigma^k$$

explizit die Richtigkeit der algebraischen Relationen (in Aufg. 7).

Aufgabe 9: Anti-Hermitizität der γ^k -Matrizen

Zeigen Sie: $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$; $(\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

mit $\gamma^k \equiv \beta \alpha^k$, und $\{\alpha^k, \beta\} = 0$

Aufgabe 10: Nichtrelativistischer Grenzfall der DE

Mit $\psi = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}$ wird die DE mit Feld $(\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & \bar{\chi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & \varphi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ -\bar{\chi} \end{pmatrix}$$

Im nrel. Grenzfall zerlegen wir

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \text{ mit langsam veränderndem } \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ genügen der Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & \varphi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

(φ ist die "große", χ die "kleine" Komponente, die im nichtrel. Grenzfall vernachlässigt wird; $\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc} \varphi$)

Aufgabe 11: Lorentz-Transformation

Zeigen Sie: Aus der Forderung der Lorentz-Invarianz
des d'Alembert-Operators

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu$$

folgt

$$\Lambda^\lambda_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\nu = g^{\lambda\rho}, \text{ oder in Matrixform}$$

$$\Lambda g \Lambda^T = g \quad (\text{dies definiert die Lorentz-Transformation})$$

$$(\text{es ist } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \equiv \Lambda^\lambda_\mu \partial'_\lambda)$$

Aufgabe 12: Dirac-adjungierte Spinoren

Beweisen Sie mit dem Dirac-adjungierten Spinor

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \text{ die Matrixrelationen: } (\bar{\psi}_1 M \psi_2)^\dagger = \bar{\psi}_2 \bar{M} \psi_1$$

$$(\bar{M} \equiv \gamma^0 M^\dagger \gamma^0)$$

Aufgabe 13: Zeitumkehr-Invarianz der DE

Zeigen Sie durch Einsetzen:

$$\text{Der Spinor } \tilde{\psi}(\vec{x}, t) \equiv S^\dagger \psi(\vec{x}, -t) \equiv \gamma_5 \gamma^0 \psi(\vec{x}, -t)$$

mit $\gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ erfüllt die DE!

Aufgabe 14: Ladungskonjugation-Invarianz der DE

Zeigen Sie durch Einsetzen:

$$\text{Der Spinor } \psi^c(\vec{x}, t) \equiv S(C) \bar{\psi}^T(\vec{x}, t) \equiv i\gamma_2 \gamma^0 \bar{\psi}^T(\vec{x}, t)$$

$$\text{mit } \bar{\psi}^T \equiv (\psi^\dagger \gamma^0)^T = (\gamma^0)^T (\psi^\dagger)^T$$

erfüllt die DE!

Aufgabe 15: Berechnen Sie aus dem exakten Ausdruck für die Dirac-Energieeigenwerte im Coulombfeld

$$E_{nj}^D = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n-j-\frac{1}{2} + [(j+\frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

durch Entwicklung nach $(Z\alpha)^2$ die nächststen Energieeigenwerte, und vergleichen Sie mit den Schrödinger-Eigenwerten.

Aufgabe 16: Weyl-Spinoren

Der zweikomponentige Spinor $u^+(p)$, $p = \{p_0, \vec{p}\}$ erfüllt die Gleichung

$$p_0 u^+(p) = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u^+(p)$$

Zeigen Sie: Es gibt nichtverschwindende Lösungen für u^+ nur für

$$p_0 = \pm |\vec{p}| = \frac{E}{c}$$

Hinweis: Wenden Sie den Helizitätsoperator $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$ auf beide Seiten der Gleichung an, und benutzen Sie $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$