5. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen am 23.5.07

Aufgabe 1: (1+2+2 Punkte)

a) Entwickeln Sie die Ausdrücke $\frac{1}{1+x}$ und $\sqrt{1+x}$ jeweils bis zur dritten Ordnung in x.

b) Entwickeln Sie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ auf zwei Arten bis zur dritten Ordnung, und zwar (i) indem Sie die Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ berechnen, und (ii) indem Sie die beiden Entwicklungen aus a) miteinander kombinieren.

c) Entwickeln Sie

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta}}$$

bis zur dritten Ordnung in $\frac{r'}{r}$, indem Sie das Ergebnis aus b) verwenden. Berechnen Sie in diesem Aufgabenteil **keine** Ableitungen. Die ermittelten Koeffizienten sollten den Legendre-Polynomen $P_l(\cos\theta)$ entsprechen.

Aufgabe 2: (4+3 Punkte)

a) Ergänzen Sie die Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten um einen weiteren Term, das Oktupolmoment Q_{ijk}. Ähnlich wie beim Quadrupolmoment können Sie einen Term hinzufügen, der Q_{ijk} 'spurfrei' macht (was heißt das in diesem Fall?). Der Beitrag des Oktupols zum Potential sollte dann die folgende Form haben:

$$\phi_3(\vec{r}) = \frac{15}{6}\frac{x_i x_j x_k}{r^7}\, Q_{ijk}.$$

b) Gegeben sei ein Würfel der Seitenlänge $2a$ mit Mittelpunkt im Ursprung. Auf allen acht Ecken befinden sich Punktladungen. Alle Ladungen haben den gleichen Betrag q_0, wobei benachbarte Ecken (d.h. Ecken, die durch eine Seite des Würfels miteinander verbunden sind), jeweils entgegengesetztes Vorzeichen haben. Zeigen Sie, dass Monopol, Dipol und Quadrupol verschwinden, und geben Sie eine nichtverschwindende Komponente des Oktupols an.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

In der Ebene $z = 0$ liege die flächenladungsfreie Grenzfläche zweier dielektrischer Materialien mit den (skalaren) Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 (für $z < 0$) und ϵ_2 (für $z > 0$). In diesen Materialien sei ein elektrisches Feld vorhanden, dessen Vektor an der Grenzfläche mit der z-Achse die Winkel α_1 (für $z < 0$) und α_2 (für $z > 0$) bildet. Leiten Sie aus den Randbedingungen an der Grenzfläche für das $\vec{E}$- und $\vec{D}$-Feld das Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien her:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Gegeben sei eine ladungsfreie Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ϵ, die in ein anfänglich homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ gebracht wird. Berechnen Sie das elektrostatische Potential in- und außerhalb der Kugel sowie das zugehörige $\vec{E}$-Feld. Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien.
Hinweis: Entwickeln Sie das Potential in sphärischen Koordinaten. Beachten Sie die Symmetrie und die Bedingungen an der Grenzfläche.