Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 03/04

8. Übungsblatt

15) Gegeben sind die beiden Operatoren

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} c_i^\dagger c_j, \quad B = \sum_{k,l} b_{kl} c_k^\dagger c_l$$

mit den Fermion-Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $c^\dagger$ und c.

a) Man bringe AB in die Normal-Ordnung für das Vakuum, das heißt in Produkten stehen stets die Erzeuger links von den Vernichtern.

b) Man berechne den Kommutator $[A, B]$.

16) Die Spin-Operatoren lassen sich

$$S_z = \sum_i (c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow} - c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow}), \quad S_+ = \sum_i c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow}, \quad S_- = \sum_i c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\uparrow}$$

schreiben.

a) Berechne die Kommutatoren der drei Spin-Operatoren mit dem Operator

$$A = \sum a_{ij} c_{i\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}.$$

b) Wie transformieren sich die Spin-Operatoren unter einer unitären Transformation der Basis

$$c_{i\uparrow} = \sum_k U_{ik} \hat{c}_{k\uparrow}, \quad c_{i\downarrow} = \sum_k U_{ik} \hat{c}_{k\downarrow}, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1?$$

Das heißt, man drücke die Spin-Operatoren durch die $\hat{c}^\dagger$ und $\hat{c}$ aus.