Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 03/04

6. Übungsblatt

11) Wir hatten die Deckoperation $\mathbf{r}' = \{\alpha, \mathbf{a}\} = \alpha\mathbf{r} + \mathbf{a}$ eingeführt.

a) Man bestimme α'' und $\mathbf{a}''$ bei der zweifachen Anwendung einer Deckoperation $\{\alpha'', \mathbf{a}''\} = \{\alpha', \mathbf{a}'\}\{\alpha, \mathbf{a}\}$.

b) Wie muss α' und $\mathbf{a}'$ gewählt werden, damit $\alpha'' = 1$ und $\mathbf{a}'' = 0$. Dieses $\{\alpha', \mathbf{a}'\}$ ist das Inverse von $\{\alpha, \mathbf{a}\}$, $\{\alpha', \mathbf{a}'\} = \{\alpha, \mathbf{a}\}^{-1}$.

c) Man bestimme damit $\{\alpha, \mathbf{a}\}\{1, \mathbf{R}_m\}\{\alpha, \mathbf{a}\}^{-1}$.

12) In einem quadratischen Gitter haben wir acht Operationen der Punktgruppe, die sich auf eine Funktion $f(k_x, k_y)$ folgendermaßen auswirken: Identität $Ef(k_x, k_y) = f(k_x, k_y)$, Drehung um 90^0: $\alpha f(k_x, k_y) = f(k_y, -k_x)$, sowie die Drehungen um 180^0 und 270^0, α^2 und α^3, die Spiegelung an der x-Achse $S_x f(k_x, k_y) = f(k_x, -k_y)$ und die Spiegelung an der y-Achse $S_y f(k_x, k_y) = f(-k_x, k_y)$, sowie zwei weitere.

a) Man gebe $\alpha^2 f(k_x, k_y)$ und $\alpha^3 f(k_x, k_y)$ explizit an. Was ist $\alpha^4 f(k_x, k_y)$?

b) Zwei Spiegelungen fehlen noch. Es sind dies die Spiegelung S_+ an $k_x = k_y$ und die Spiegelung S_- an $k_x = -k_y$. Man gebe $S_+ f(k_x, k_y)$ und $S_- f(k_x, k_y)$ an.

c) Man zeige, dass $\cos(k_x) + \cos(k_y)$, $\cos(k_x) - \cos(k_y)$, $\sin(k_x)\sin(k_y)$ und $\sin(k_x)\sin(k_y)(\cos(k_x) - \cos(k_y))$ Eigenfunktionen der Operationen α, S_x und S_y sind und gebe die zugehörigen Eigenwerte an. Welche Parität haben diese Funktionen?

d) Man zeige, dass $\sin(k_x)$ und $\sin(k_y)$ Eigenfunktionen von α^2, S_x und S_y sind, und bestimme die Eigenwerte.

e) Diese Funktionen $\sin(k_x)$ und $\sin(k_y)$ sind keine Eigenfunktionen von α. Welche Linearkombinationen sind Eigenfunktionen von α und mit welchen Eigenwerten?