

# Klassische Elektrodynamik

Vorlesung an der Universität Heidelberg

**Carlo Ewerz**

Institut für Theoretische Physik

Universität Heidelberg

Letzte Änderung: 10. Januar 2019





# Inhaltsverzeichnis

<b>Prolog</b>	<b>1</b>
<b>Vorbemerkungen</b>	<b>3</b>
Inhalt . . . . .	3
Aufbau der Vorlesung, Maßsystem . . . . .	3
Literatur . . . . .	3
Zu diesen Notizen . . . . .	4
<b>I    Physikalische und mathematische Grundlagen, Maxwell-Gleichungen</b>	<b>5</b>
I.1    Elektrodynamik als fundamentale Theorie . . . . .	5
I.2    Kräfte zwischen geladenen Teilchen . . . . .	5
I.3    Feldbegriff und Lorentzkraft . . . . .	6
I.4    Feld ruhender Ladungen . . . . .	8
I.5    Fundamentalsatz der Vektoranalysis . . . . .	11
I.6    Maxwellsche Gleichungen . . . . .	15
I.6.a    Grundgesetze für das elektrische Feld . . . . .	16
I.6.b    Grundgesetze für das magnetische Feld . . . . .	19
I.6.c    Maxwell-Gleichungen . . . . .	21
I.6.d    Signifikanz des Maxwellschen Verschiebungsstroms . . . . .	22
I.7    Kontinuitätsgleichung . . . . .	23
I.8    Gleichungen der klassischen Elektrodynamik, Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen . . . . .	23
I.9    Elektrostatische Feldenergie, Grenzen der Gültigkeit der klassischen Elektrodynamik . . . . .	24
<b>II    Elektrostatisches und magnetostatisches Grundproblem, Randwertprobleme</b>	<b>27</b>
II.1    Die Greenschen Formeln und der Fundamentalsatz der Vektoranalysis . . . . .	27
II.2    Konstruktion der Felder aus vorgegebenen Quellen und Wirbeln . . . . .	29
II.2.a    Elektrostatische Grundaufgabe . . . . .	30
II.2.b    Magnetostatische Grundaufgabe . . . . .	31
II.2.c    Allgemeiner Fall vorgegebener Quellen und Wirbel . . . . .	33
II.3    Randwertaufgaben der makroskopischen Elektrostatik . . . . .	35
II.3.a    Elektrische Leiter . . . . .	35
II.3.b    Randbedingungen für die Poisson-Gleichung . . . . .	36
II.3.c    Lösung des Dirichlet- und Neumann-Problems mit Greenschen Funktionen . . . . .	37

II.3.d	Methode der Spiegelladungen . . . . .	38
<b>III</b>	<b>Multipolentwicklung elektrostatischer Felder, vollständige Funktionensysteme</b>	<b>42</b>
III.1	Transformationseigenschaften von Feldern, Tensoren . . . . .	42
III.2	Multipolmomente einer statischen Ladungsverteilung . . . . .	45
III.3	Vollständige, orthogonale Funktionensysteme . . . . .	52
III.4	Fourier-Entwicklung, Fourier-Transformation . . . . .	54
III.5	Legendre-Polynome . . . . .	56
III.6	Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, Kugelflächenfunktionen . . . . .	58
III.7	Elektrische Multipole beliebiger Ordnung . . . . .	60
<b>IV</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>64</b>
IV.1	Magnetfeld eines geradlinigen Leiters . . . . .	65
IV.2	Kraft auf einen Strom im Magnetfeld . . . . .	66
IV.3	Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol . . . . .	67
IV.4	Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms . . . . .	69
IV.5	Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol . . . . .	71
<b>V</b>	<b>Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen, elektromagnetische Wellen</b>	<b>72</b>
V.1	Lösung der homogenen Gleichungen, allgemeine elektromagnetische Potentiale, Eichtransformationen . . . . .	72
V.2	Die inhomogenen Gleichungen, Coulomb- und Lorenz-Eichung . . . . .	74
V.2.a	Coulomb-Eichung . . . . .	74
V.2.b	Lorenz-Eichung . . . . .	76
V.2.c	Andere Eichungen . . . . .	77
V.3	Lösung der freien Wellengleichung . . . . .	78
V.3.a	Lösung durch ebene Wellen . . . . .	78
V.3.b	Monochromatische ebene elektromagnetische Wellen, Polarisation ebener Wellen . . . . .	79
V.3.c	Allgemeine Lösung der freien Wellengleichung . . . . .	83
V.3.d	Kugelwellen . . . . .	85
V.4	Lösung der inhomogenen Wellengleichung . . . . .	88
V.5	Die retardierten Potentiale . . . . .	91
<b>VI</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>95</b>
VI.1	Klassische Vorstellung von Raum und Zeit, Galilei-Transformationen . . . . .	95
VI.2	Relativität und Elektrodynamik, Einsteins Postulate . . . . .	97
VI.3	Spezielle Lorentz-Transformationen . . . . .	100
VI.4	Relativistische Notation, der Minkowski-Raum . . . . .	101
VI.5	Geometrie des Minkowski-Raums . . . . .	104
VI.5.a	Kausalität und Minkowski-Diagramme . . . . .	104
VI.5.b	Zeitdilatation . . . . .	106
VI.5.c	Längenkontraktion . . . . .	107
VI.5.d	Addition von Geschwindigkeiten . . . . .	109
VI.5.e	Horizonte . . . . .	109
VI.6	Lorentz- und Poincaré-Transformationen . . . . .	110

<b>VII Kovariante Formulierung der Elektrodynamik</b>	<b>116</b>
VII.1 Viererpotential und Feldstärketensor . . . . .	116
VII.2 Transformation der elektromagnetischen Felder . . . . .	117
VII.3 Viererstromdichte und Maxwell-Gleichungen . . . . .	119
VII.4 Invarianten des elektromagnetischen Feldes . . . . .	122
VII.5 Transformation ebener elektromagnetischer Wellen und Doppler-Effekt . . .	122
VII.6 Elektrodynamik in Differentialformen* . . . . .	125
<b>VIII Relativistische Mechanik</b>	<b>126</b>
VIII.1 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit . . . . .	126
VIII.2 Energie-Impuls-Beziehung, Bewegungsgleichung . . . . .	127
VIII.3 Lagrange- und Hamiltonfunktion . . . . .	132
VIII.3.a Freies Teilchen . . . . .	132
VIII.3.b Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	135
<b>IX Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik</b>	<b>137</b>
IX.1 Lagrange-Formalismus für Felder . . . . .	137
IX.2 Lagrangedichte der Elektrodynamik . . . . .	137
IX.3 Photonmasse . . . . .	137
<b>X Elektrodynamik in Materie</b>	<b>138</b>
X.1 Materie im statischen elektrischen Feld . . . . .	138
X.1.a Polarisierung und dielektrische Verschiebung . . . . .	138
X.1.b Ladung im Dielektrikum . . . . .	141
X.1.c Kraft auf dielektrischen Körper im elektrischen Feld . . . . .	141
X.1.d Grenzflächen von Dielektrika . . . . .	142
X.2 Materie im statischen magnetischen Feld . . . . .	144
X.2.a Magnetisierung und magnetische Feldstärke . . . . .	144
X.2.b Magnetische Felder an Grenzflächen . . . . .	146
X.2.c Ferromagnetismus . . . . .	147
X.3 Elektrische Leiter . . . . .	147
X.4 Maxwell-Gleichungen in Materie . . . . .	149
X.5 Elektromagnetische Wellen in Materie . . . . .	150
X.5.a Telegraphengleichung . . . . .	150
X.5.b Elektromagnetische Wellen in Isolatoren . . . . .	151
X.5.c Dispersion . . . . .	152
X.5.d Elektromagnetische Wellen in Leitern . . . . .	154
X.5.e Kramers-Kronig-Relationen* . . . . .	156
<b>XI Energie- und Impulssatz für das elektromagnetische Feld</b>	<b>157</b>
XI.1 Energiesatz der Elektrodynamik . . . . .	157
XI.2 Feldenergie der Elektro- und Magnetostatik . . . . .	160
XI.3 Impulssatz der Elektrodynamik . . . . .	160
XI.4 Kovariante Form des Energie- und Impulssatzes . . . . .	164

---

<b>XII Maßsysteme der Elektrodynamik</b>	<b>166</b>
XII.1 Grundeinheiten und abgeleitete Einheiten . . . . .	166
XII.2 Elektromagnetische Einheiten und elektromagnetische Grundgleichungen . .	168
XII.3 Elektromagnetische Maßsysteme . . . . .	169
<b>XIII Felder bewegter Ladungen</b>	<b>171</b>
XIII.1 Liénard-Wiechert-Potentiale . . . . .	171
XIII.2 Strahlung beschleunigter Ladungen, Larmor-Formel . . . . .	175
XIII.3 Strahlung oszillierender Ladungsverteilungen . . . . .	176
XIII.3.a Elektrische Dipolstrahlung, Hertzscher Dipol . . . . .	178
XIII.3.b Magnetische Dipolstrahlung, elektrische Quadrupolstrahlung . . . .	181
XIII.4 Thomson- und Rayleigh-Streuung . . . . .	181
XIII.4.a Thomson-Streuung . . . . .	181
XIII.4.b Rayleigh-Streuung . . . . .	181
XIII.4.c Das Blau des Himmels . . . . .	181

# Prolog

*... Weil wir aber schon einmal von dem Großen und Kleinen reden, so will ich meine Ansichten darlegen, die wahrscheinlich von denen vieler anderer Menschen abweichen. Das Wehen der Luft, das Rieseln des Wassers, das Wachsen der Getreide, das Wogen des Meeres, das Grünen der Erde, das Glänzen des Himmels, das Schimmern der Gestirne halte ich für groß: das prächtig einherziehende Gewitter, den Blitz, welcher Häuser spaltet, den Sturm, der die Brandung treibt, den feuerspeienden Berg, das Erdbeben, welches Länder verschüttet, halte ich nicht für größer als obige Erscheinungen, ja ich halte sie für kleiner, weil sie nur Wirkungen viel höherer Gesetze sind. Sie kommen auf einzelnen Stellen vor und sind die Ergebnisse einseitiger Ursachen. Die Kraft, welche die Milch im Töpfchen der armen Frau emporschwellen und übergehen macht, ist es auch, die die Lava in dem feuerspeienden Berge emportreibt und auf den Flächen der Berge hinabgleiten läßt. Nur augenfälliger sind diese Erscheinungen und reißen den Blick des Unkundigen und Unaufmerksamen mehr an sich, während der Geisteszug des Forschers vorzüglich auf das Ganze und Allgemeine geht und nur in ihm allein Großartigkeit zu erkennen vermag, weil es allein das Welterhaltende ist. Die Einzelheiten gehen vorüber, und ihre Wirkungen sind nach kurzem kaum noch erkennbar. Wir wollen das Gesagte durch ein Beispiel erläutern. Wenn ein Mann durch Jahre hindurch die Magnetnadel, deren eine Spitze immer nach Norden weist, tagtäglich zu festgesetzten Stunden beobachtete und sich die Veränderungen, wie die Nadel bald mehr bald weniger klar nach Norden zeigt, in einem Buche aufschrieb, so würde gewiß ein Unkundiger dieses Beginnen für ein kleines und für Spielerei ansehen: aber wie ehrfurchterregend wird dieses Kleine und wie begeisterungserweckend diese Spielerei, wenn wir nun erfahren, daß diese Beobachtungen wirklich auf dem ganzen Erdboden angestellt werden, und daß aus den daraus zusammengestellten Tafeln ersichtlich wird, daß manche kleine Veränderungen an der Magnetnadel oft auf allen Punkten der Erde gleichzeitig und in gleichem Maße vor sich gehen, daß also ein magnetisches Gewitter über die ganze Erde geht, daß die ganze Erdoberfläche gleichzeitig gleichsam ein magnetisches Schauern empfindet. Wenn wir, so wie wir für das Licht die Augen haben, auch für die Elektrizität und den aus ihr kommenden Magnetismus ein Sinneswerkzeug hätten, welche große Welt, welche Fülle von unermesslichen Erscheinungen würde uns da aufgetan sein. Wenn wir aber auch dieses leibliche Auge nicht haben, so haben wir dafür das geistige der Wissenschaft, und diese lehrt uns, daß die elektrische und magnetische Kraft auf einem ungeheuren Schauplatze wirke, daß sie auf der ganzen Erde und durch den ganzen Himmel verbreitet sei, daß sie alles umfließe und sanft und unablässig verändernd, bildend und lebenerzeugend sich darstelle. Der Blitz ist nur ein ganz kleines Merkmal dieser Kraft, sie selber aber ist ein Großes in der Natur. Weil aber die Wissenschaft nur Körnchen erringt, nur Beobachtung nach Beobachtung macht, nur aus Einzelem das Allgemeine zusammenträgt, und weil endlich die Menge der Erscheinungen und das Feld des Gegebenen unendlich groß ist, Gott also die Freude und die Glückseligkeit des Forschens unversieglich gemacht hat, wir auch in unseren Werkstätten im-*

mer nur das Einzelne darstellen können, nie das Allgemeine, denn dies wäre die Schöpfung: so ist auch die Geschichte des in der Natur Großen in einer immerwährenden Umwandlung der Ansichten über dieses Große bestanden. Da die Menschen in der Kindheit waren, ihr geistiges Auge von der Wissenschaft noch nicht berührt war, wurden sie von dem Nahestehenden und Auffälligen ergriffen und zu Furcht und Bewunderung hingerissen: aber als ihr Sinn geöffnet wurde, da der Blick sich auf den Zusammenhang zu richten begann, so sanken die einzelnen Erscheinungen immer tiefer, und es erhob sich das Gesetz immer höher, die Wunderbarkeiten hörten auf, das Wunder nahm zu.

Adalbert Stifter  
Aus der Vorrede zu *Bunte Steine*  
1852



# Vorbemerkungen

## Ziel und Inhalt

Ziel der Vorlesung ist, die theoretische Beschreibung der Elektrodynamik und der speziellen Relativitätstheorie zu verstehen. Besonderes Gewicht liegt dabei auf dem Verständnis der Elektrodynamik als fundamentaler Eichtheorie der Natur. Ein weiterer wesentlicher Aspekt ist das Erlernen wichtiger mathematischer Methoden, die in vielen Bereichen der theoretischen Physik von Bedeutung sind. Die Vorlesung umfaßt insbesondere

- Elektro- und Magnetostatik
- Elektrodynamik
- spezielle Relativitätstheorie.

## Aufbau der Vorlesung, Maßsystem

Es wird angenommen, daß die Hörer bereits mit den grundlegenden Phänomenen der Elektrodynamik vertraut sind.

Wir werden deduktiv vorgehen, d. h. die Maxwell-Gleichungen nach kurzer Motivation postulieren und dann deren Konsequenzen ableiten. Motivation dafür ist, daß die Elektrodynamik eine fundamentale Theorie basierend auf dem **Eichprinzip** ist, das dem gesamten Standardmodell der Elementarteilchenphysik zugrunde liegt. In der modernen Sicht ist das Eichprinzip die Grundlage, und damit die daraus resultierenden Maxwell-Gleichungen. Die historische Entwicklung ist zwar interessant, aber nicht alle historischen Zufälle und Irrwege sind dem Verständnis zuträglich.

Wir verwenden das **Gaußsche Maßsystem**, *nicht* das SI-System. In der Vorlesung stehen theoretische Aspekte im Vordergrund. Für diese ist das Gaußsche System (neben dem Heaviside-Lorentz-System) am besten geeignet.

## Literatur

Es gibt eine ganze Reihe von Lehrbüchern zur Elektrodynamik. Besonders zu empfehlen sind u. a.

- J. D. Jackson  
Classical Electrodynamics (2nd ed.)  
Wiley & Sons

- M. Bartelmann et al  
Theoretische Physik  
Springer Verlag
- R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands  
The Feynman Lectures on Physics, vol. II  
Addison-Wesley.

## **Zu diesen Notizen**

Diese Vorlesungsnotizen können und sollen die Vorlesung nicht ersetzen. Sie sollen vielmehr das Nacharbeiten der Vorlesung erleichtern.

Die hier behandelten Themen wurden zum großen Teil vor mehr als 100 Jahren erforscht. Kaum eine Gleichung in diesen Notizen findet sich nicht bereits in Publikationen, Lehrbüchern oder Vorlesungsskripten anderer Autoren. In den vorliegenden Notizen wird lediglich der Versuch einer nützlichen und hoffentlich kohärenten Darstellung der Elektrodynamik unternommen, die sich an Studenten des Bachelorstudiengangs Physik richtet. Es wird keinerlei Anspruch auf Originalität erhoben. Teile dieser Darstellung orientieren sich an Vorlesungen, in denen der Autor selber wichtige Aspekte der Elektrodynamik gelernt hat, darunter insbesondere Vorlesungen von Dieter Schütte und Horst Rollnik an der Universität Bonn.

# Kapitel I

## Physikalische und mathematische Grundlagen, Maxwell-Gleichungen

### I.1 Elektrodynamik als fundamentale Theorie

In der Natur sind uns vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt:

- Gravitation
- schwache Wechselwirkung
- elektromagnetische Wechselwirkung
- starke Wechselwirkung,

wobei schwache und elektromagnetische Wechselwirkung in der elektroschwachen Wechselwirkung 'vereinheitlicht' sind.

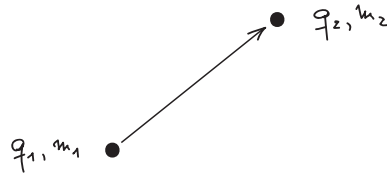
Die besondere Stellung der elektromagnetischen Wechselwirkung besteht darin, daß sie für die meisten Eigenschaften der Materie (z. B. chemisches, optisches Verhalten) und die meisten Phänomene des täglichen Lebens verantwortlich ist. Nur bei astronomischen und subatomaren Längenskalen werden die anderen Wechselwirkungen wichtiger.

Von den vier Grundkräften haben nur die Gravitation und die elektromagnetische Wechselwirkung unendliche Reichweite. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist aber etwa  $10^{40}$  mal stärker als die Gravitation.

Wechselwirkung	rel. Stärke	Reichweite
starke WW	$\sim 1$	$\sim 10^{-15}$ m
e. m. WW	$\sim 1/137$	$\infty$
schwache WW	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-13}$ m
Gravitation	$\sim 10^{-39}$	$\infty$

### I.2 Kräfte zwischen geladenen Teilchen

Zwischen zwei ruhenden Teilchen der Massen  $m_1$  bzw.  $m_2$  und der Ladungen  $q_1$  bzw.  $q_2$  bestehen **zwei** Kräfte:



**Gravitationsgesetz:**

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{I.1})$$

**Coulombgesetz:**

$$\mathbf{F}_C = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{I.2})$$

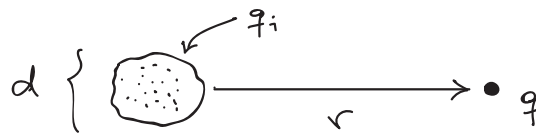
Man beachte, daß im Gauß-System kein Faktor  $4\pi$  im Coulombgesetz auftritt.

Es gibt (im Gegensatz zur Gravitation) positive und negative Ladungen. Aus dem Coulombgesetz folgt:

- Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab,
- Ladungen ungleichen Vorzeichens ziehen sich an.

Elektrische Wirkungen können sich daher kompensieren, was bei der Gravitation nicht möglich ist.

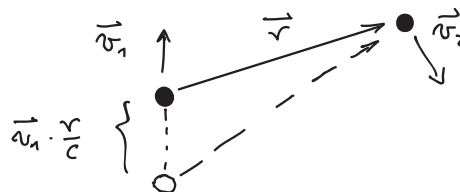
Die von einer lokalisierten Ladungsverteilung  $q_1, \dots, q_n$  auf eine weit entfernte Punktladung  $q$  ausgeübte Kraft ist



$$\mathbf{F}_C = \frac{q \sum_{i=1}^n q_i}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (\text{I.3})$$

Dabei kann  $\sum_i q_i$  verschwinden.

Das Coulombgesetz gilt nur für **ruhende** Ladungen. Für zwei bewegte Ladungen gilt das **Gesetz von Liénard-Wiechert**, bei dem die Kraft auf Teilchen 1 unter anderem von der Position des zweiten Teilchens zu einem um  $\frac{r}{c}$  früheren (retardierten) Zeitpunkt abhängt, wie wir später sehen werden.  $c$  ist hierbei die Lichtgeschwindigkeit.



### I.3 Feldbegriff und Lorentzkraft

Gemäß dem Coulombgesetz versteht man die elektrische Kraft als **Fernwirkungskraft** bzw. **nichtlokale Wechselwirkung**. Demzufolge

- a) tritt die Kraftwirkung **instantan** über beliebige Entfernung ein;

b) wird die Kraft nicht durch ein übertragendes Medium vermittelt.

Das Gesetz von Liénard-Wiechert für die Kraft zwischen bewegten Ladungen widerspricht aber a). Retardierung kennt man üblicherweise von Wirkungen, die ein Medium erfordern (z. B. Knall, ...). Auch sonst ist die Erfahrung, daß Kräfte zur Übertragung ‘Zwischenglieder’ erfordern.

Faraday schlug ~1830 eine **Nahwirkungstheorie** vor: Demzufolge versetzt elektrische Ladung den Raum in einen ‘Erregungszustand’, der sich durch Kraftwirkung bemerkbar macht. Konsequenzen (bzw. scheinbare Konsequenzen) dieser Auffassung sind:

1. Man erwartet Zeitdifferenz zwischen Ursache und Wirkung, was gemäß dem Liénard-Wiechert-Gesetz experimentell bestätigt wird.
2. Man benötigt ein ‘Medium’, das den elektrischen Zustand trägt. Dies führt zur Vorstellung des **Äthers**.

Bei genauerer Betrachtung findet man aber:

zu 1. Man kann aus der experimentellen Bestätigung der Retardierung *nicht* die Richtigkeit der Nahwirkungstheorie beweisen (Wheeler, Feynman).

zu 2. Der Äther läßt sich experimentell nicht finden!

→ Man ersetzt den ‘anschaulichen’ Äther durch eine abstraktere Begriffsbildung.

Der ‘Erregungszustand des Raumes’ hervorgerufen durch (ruhende oder bewegte) Ladung ist das **elektromagnetische Feld**. **Feld** bedeutet: Jedem Punkt im Raum wird eine Größe zugeordnet (Skalar, Vektor, allgemein: Tensor  $n$ -ter Stufe).

#### Elektromagnetisches Feld:

Zu jeder Zeit  $t$  sind jedem Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  des Raumes zwei Vektoren zugeordnet:

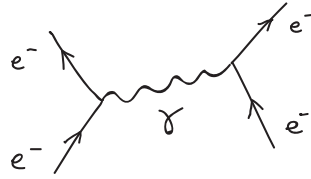
- für das **elektrische** Feld:  
 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \equiv$  **elektrische Feldstärke** (ein polarer Vektor)
- für das **magnetische** Feld:  
 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \equiv$  **magnetische Induktion** oder **magnetische Kraftflußdichte** (ein axialer Vektor)

$\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  werden oft vereinfachend (und inkorrekt) als ‘elektrisches und magnetisches Feld’ bezeichnet.

Die Kraftwirkung der Felder auf ein Teilchen der Ladung  $q$ , das sich zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, ist gegeben durch die **Lorentzkraft**

$$\mathbf{F} = q \left[ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (\text{I.4})$$

Das heutige Verständnis des klassischen Feldes in der Quantenmechanik (QM) bzw. Quantenfeldtheorie (QFT) ist folgendes: Alle Kräfte werden mikroskopisch durch den Austausch von **Bosonen** beschrieben, z. B. Photonen für die elektromagnetische Kraft. Symbolisch (genauer: als Feynman-Diagramm) dargestellt etwa für den Austausch eines Photons ( $\gamma$ ) zwischen zwei Elektronen:



**Klassische Felder** erhält man im Falle großer Photonenzahlen. Bei vielen mikroskopischen Phänomenen ist dagegen eine klassische Beschreibung *nicht* möglich, z. B. bei der Emission einzelner Photonen von einem Atom, beim Photoeffekt etc.

### Bemerkungen zur Lorentzkraft

- Wir werden die Lorentzkraft als *Erfahrungstatsache* betrachten und nicht aus anderen Voraussetzungen herleiten.
- Die Lorentzkraft ist experimentell überprüfbar.
- Die Einheiten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind im Gaußschen Maßsystem gleich,

$$[E] = [B].$$

- Es besteht ein innerer Zusammenhang zwischen  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  als Folge der Galilei-Invarianz (bzw. genauer: der Lorentz-Invarianz). Betrachten wir hierzu zwei Systeme, die mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  gegeneinander bewegt sind. Im mit dem Teilchen bewegten System ist die Kraft

$$\mathbf{K}' = q\mathbf{E}',$$

denn  $\mathbf{v}' = 0$ . Wegen der Galilei-Invarianz sind die Kräfte in beiden Systemen gleich,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$ . Also

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (\text{I.5})$$

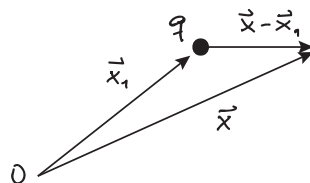
bzw. bei (korrekter) Lorentz-Invarianz

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right]. \quad (\text{I.6})$$

Besonders deutlich wird der Zusammenhang für den Fall  $\mathbf{E} = 0$ : dann 'sieht' ein im Magnetfeld bewegter Beobachter ein elektrisches Feld  $\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

## I.4 Feld ruhender Ladungen

Für eine ruhende Punktladung  $q$  bei  $\mathbf{x}_1$  gilt



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \quad (\text{I.7})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{I.8})$$

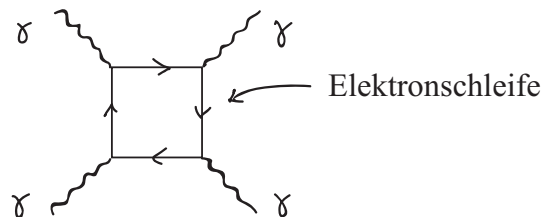
Es gilt das **Superpositionsprinzip**: Das Feld mehrerer Ladungen ist gleich der *Vektorsumme* der Felder der einzelnen Ladungen,

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i. \quad (\text{I.9})$$

Für Ladungen  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{x}_i$  also

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (\text{I.10})$$

Beachte: Das Superpositionsprinzip folgt *nicht* aus dem Vektorcharakter von  $\mathbf{E}$ ! Der mathematische Begriff 'Vektor' besagt nur, daß man Vektoren addieren kann. Ob die Wirkung mehrerer Ladungen durch die Vektorsumme gegeben ist, kann man aus der Mathematik nicht folgern. Dies ist vielmehr eine experimentelle (physikalische) Beobachtung. **Nichtlinearitäten** können durch quantenmechanische bzw. quantenfeldtheoretische Effekte auftreten und sind im allgemeinen sehr klein. Beispiel ist die sog. Licht-an-Licht Streuung (Delbrück-Streuung):



Im Falle sehr vieler Teilchen ist es bequemer, in (I.10) ein Integral statt einer Summe zu benutzen. Technisch verwendet man dazu die **Diracsche  $\delta$ -Funktion** (bzw. genauer:  **$\delta$ -Distribution**).

### Einschub über die $\delta$ -Funktion

Die  $\delta$ -Funktion definiert durch ihre Wirkung bei der Integration. In 1D soll für jede Funktion  $f$ , die integrierbar ist und insbesondere für  $|x| \rightarrow \infty$  stärker als  $1/|x|$  abfällt, gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' = f(x) \quad (\text{I.11})$$

$$\text{und} \quad \delta(x - x') = 0 \quad \text{für} \quad x \neq x'.$$

Analog ist für ein allgemeines Integrationsgebiet  $G$

$$\int_G f(x') \delta(x - x') dx' = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Für die folgenden Eigenschaften sind i. a. weitere Annahmen über die Funktion  $f$  erforderlich (unendlich häufige Differenzierbarkeit, stärkeres Abfallen für  $|x| \rightarrow \infty$  als jede Potenz).

Im Zusammenhang mit Distributionen nennt man Funktionen  $f$  mit diesen Eigenschaften **Testfunktionen**.

Die  $\delta$ -Funktion kann aufgefaßt werden als Ableitung der  **$\theta$ -Funktion** (auch **Heaviside-Funktion**)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} . \quad (\text{I.13})$$

Ableitungen der  $\delta$ -Funktion sind mittels partieller Integration definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \delta(t-x) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) . \quad (\text{I.14})$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

- Für eine differenzierbare Funktion  $f(x)$  mit endlich vielen *einfachen* Nullstellen  $x_1, \dots, x_n$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (\text{I.15})$$

- Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (\text{I.16})$$

$$\delta(a^2 - x^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (\text{I.17})$$

- 

$$x\delta(x) = 0 . \quad (\text{I.18})$$

Es gibt verschiedene Darstellungen der  $\delta$ -Funktion, darunter besonders wichtig

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk . \quad (\text{I.19})$$

Man definiert die  $\delta$ -Funktion in 3D (mit der Notation  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  etc.) als

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') , \quad (\text{I.20})$$

so daß

$$\int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) \quad (\text{I.21})$$

und

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} . \quad (\text{I.22})$$

Die  $\delta$ -Funktion und die Heaviside-Funktion sind Beispiele für **Distributionen**. Salopp gesagt handelt es sich dabei um verallgemeinerte Funktionen. Etwas genauer gesagt, sind Distributionen eine Untermenge der Funktionale. Dabei handelt es sich um Abbildungen, die Funktionen auf reelle oder komplexe Zahlen abbilden,

$$\mathcal{F} : f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto a \in \mathbb{R} , \quad (\text{I.23})$$



im Beispiel der  $\delta$ -Funktion

$$\delta : f(x) \mapsto f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (\text{I.24})$$

---

Wir können dann eine Menge von Punktladungen beschreiben durch die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (\text{I.25})$$

so daß

$$\int \rho(\mathbf{x}) d^3x = \sum_i q_i = Q, \quad (\text{I.26})$$

wobei  $Q$  die Gesamtladung ist. Man verifiziert leicht, daß

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (\text{I.27})$$

dann mit (I.10) identisch ist. Beachte: die Formel (I.27) gilt *nur* für ruhende Ladungen. Sie enthält nur das Superpositionsgesetz und das Coulombgesetz – damit aber fast die gesamte Elektrostatik. In makroskopischen Anwendungen benutzt man oft glatte (stetige) Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{x})$ .

In ähnlicher Weise das Feld bewegter Ladungen zu berechnen, ist mathematisch i. a. sehr schwierig. Stattdessen werden wir (I.27) in eine differentielle Form bringen, die für die Verallgemeinerung auf bewegte Ladungen besser geeignet ist. Dazu benötigen wir einen wichtigen Satz aus der Vektoranalysis.

## I.5 Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Wir teilen hier einige wichtige Ergebnisse der Vektoranalysis mit (ohne Herleitung). Wir wollen hier das qualitative Bild genauer fassen, das aus der Hydrodynamik anschaulich ist: ein Vektorfeld ist durch seine **Wirbel** und **Quellen** bestimmt.

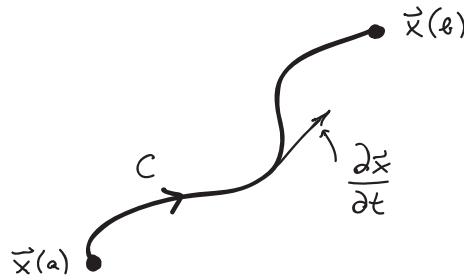
---

### Einschub über Linien- und Flächenintegrale

Wir betrachten zunächst *Linienintegrale* (*Kurvenintegrale*):

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$$

entlang einer Kurve  $\mathcal{C}$  für ein Vektorfeld  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ . Solche Integrale berechnet man durch Parametrisierung der Kurve  $\mathcal{C}$ :



$$\begin{aligned} \mathcal{C} : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(a) &= \text{Anfangspunkt von } \mathcal{C} \\ \mathbf{x}(b) &= \text{Endpunkt von } \mathcal{C} \end{aligned}$$

Dann ist

$$ds = \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \quad (\text{I.28})$$

und  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$  ist der momentane Geschwindigkeitsvektor beim Durchlaufen der Kurve, d. h.  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$  ist Tangentialvektor an  $\mathcal{C}$  am Ort  $\mathbf{x}(t)$ . Also ist  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$  die Projektion des Vektors  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$  (das ist der Wert des Vektorfelds  $\mathbf{a}$  am Punkt  $\mathbf{x}(t)$ ) auf den Geschwindigkeitsvektor. Dann ist

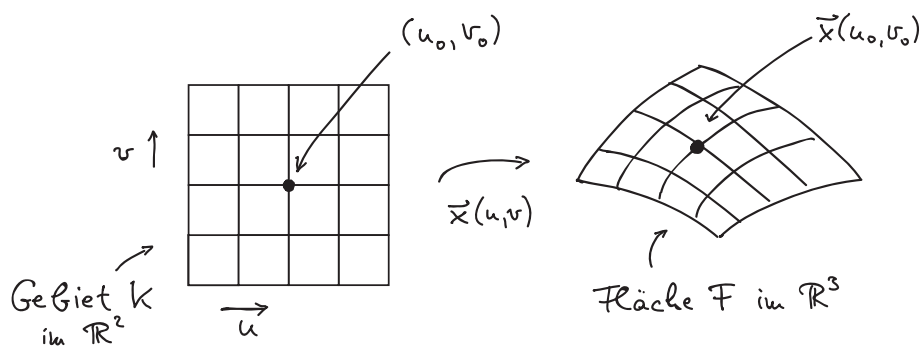
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) dt, \quad (\text{I.29})$$

und der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung des Weges  $\mathcal{C}$ .

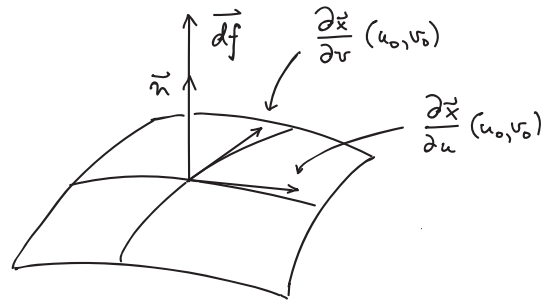
Weiter betrachten wir *Flächenintegrale*

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}$$

über eine Fläche  $\mathcal{F}$  im  $\mathbb{R}^3$  für ein Vektorfeld  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ . Dazu parametrisiert man die Fläche  $\mathcal{F}$ :



An der Stelle  $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ :



Der Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  ist

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right|} \quad (\text{I.30})$$

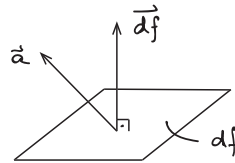
und es ist

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot df = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv, \quad (\text{I.31})$$

d. h.

$$df = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| du dv. \quad (\text{I.32})$$

Die Projektion des Vektors  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(u_0, v_0))$  auf  $d\mathbf{f}$  an dieser Stelle ist



$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} df =: a_n df, \quad (\text{I.33})$$

und das Flächenintegral wird

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} = \int_K \mathbf{a}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv. \quad (\text{I.34})$$

Analog kann man

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \times d\mathbf{f}$$

erhalten.

Wir definieren den **Fluß des Vektorfelds**  $\mathbf{a}$  durch die *geschlossene* Oberfläche  $\mathcal{O}$ , die ein Volumen  $V$  umschließt:

$$\phi := \int_{\mathcal{O}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}, \quad (\text{I.35})$$

wobei in  $d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot df$  der Vektor  $\mathbf{n}$  der *äußere* Normalenvektor ist und  $df$  das Flächenelement. Für die Oberfläche  $\mathcal{O}$  des Volumens  $V$  schreiben wir  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(V) = \partial V$ .

Läßt man  $V$  klein werden,  $V \rightarrow \delta V$ , so erhält man im Grenzwert  $\delta V \rightarrow 0$  die Definition der **Divergenz** (früher: 'Ergiebigkeit'):

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \int_{\mathcal{O}(\delta V)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.36})$$

Der Grenzwert existiert, falls  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar ist. Für kartesische Koordinaten  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  kann man zeigen:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} a_3 \quad (\text{I.37})$$

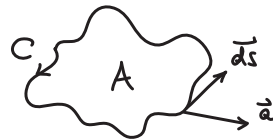
wenn  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ .

Es gilt der (mathematische) **Gaußsche Satz**:

Sei  $V$  (reguläres) Volumen und  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  stetiges Vektorfeld (mit stückweise stetigen Ableitungen). Dann

$$\int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{a}) d^3x. \quad (\text{I.38})$$

Die **Zirkulation** eines Vektorfeldes ist für eine *geschlossene* Raumkurve  $\mathcal{C}$  definiert als



$$\Gamma := \int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot ds. \quad (\text{I.39})$$

In der Hydrodynamik ist z. B.  $\Gamma \neq 0$  für wirbelnde Strömungen, und  $\Gamma = 0$  für homogene Strömungen ( $\mathbf{a} = \text{const.}$ ).

Läßt man die umschlossene Fläche  $A$  klein werden,  $A \rightarrow \delta A$ , so erhält man im Grenzwert  $\delta A \rightarrow 0$  die Definition der **Rotation**. Wir definieren dazu  $\gamma(\delta A)$  so daß

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}(\delta A)} \mathbf{a} \cdot ds = \gamma(\delta A) \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.40})$$

Ist  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  ein differenzierbares Vektorfeld, so existiert der Grenzwert

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} := \lim_{\delta A \rightarrow 0} \gamma(\delta A), \quad (\text{I.41})$$

die *Rotation* von  $\mathbf{a}$ . In kartesischen Koordinaten gilt

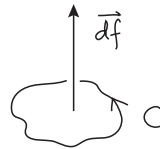
$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{a})_1 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_2 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_3 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

In der Vektoranalysis beweist man den **Satz von Stokes**:

Ist  $A$  eine (reguläre) Fläche,  $\mathcal{C} = \partial A$  die sie umschließende Kurve, und  $\mathbf{a}$  ein differenzierbares Vektorfeld, so

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\text{rot } \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.43})$$

Dabei ist die Richtung von  $d\mathbf{f}$  nach der Rechte-Hand-Regel bestimmt:



In kartesischen Koordinaten zeigt man leicht

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0. \quad (\text{I.44})$$

Es gilt folgender **Fundamentalsatz**:

Ein Vektorfeld  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  ist eindeutig bestimmt, wenn

a) seine Quellen, d. h.  $\text{div } \mathbf{a}$ , und seine Wirbel, d. h.  $\text{rot } \mathbf{a}$ , im gesamten Raum bekannt sind

und

b)  $\text{div } \mathbf{a}$  und  $\text{rot } \mathbf{a}$  im Unendlichen genügend stark abfallen (z. B. beide gleich Null außerhalb einer Kugel mit endlichem Radius)

und

c) wenn  $\mathbf{a}$  mindestens wie  $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$  für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  abfällt.

Zu Beweis und Diskussion: siehe später.

## I.6 Maxwellsche Gleichungen

Gemäß dem obigen Fundamentalsatz benötigen wir zur vollständigen Festlegung des elektromagnetischen Feldes folgende vier Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}, & \quad \text{div } \mathbf{B}, \\ \text{rot } \mathbf{E}, & \quad \text{rot } \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Dazu sind mindestens vier unabhängige experimentelle Tatsachen erforderlich. Bisher haben wir nur eine gesehen: die Grundgleichung der Elektrostatik.

### I.6.a Grundgesetze für das elektrische Feld

Wir berechnen aus

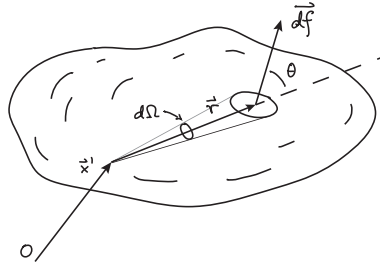
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (\text{I.45})$$

den Fluß

$$\phi_E = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.46})$$

durch die geschlossene Fläche  $\mathcal{O}$ . Betrachte dazu zunächst eine einzelne Ladung bei  $\mathbf{x}'$ . Mit  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  ist also zu berechnen

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.47})$$



Es ist  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = r df \cos \theta = r df_r$ , worin  $df_r$  die Projektion von  $d\mathbf{f}$  auf  $\mathbf{r}$  ist. Nach Definition des Raumwinkels ist  $df_r = r^2 d\Omega$ , so daß  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = r^3 d\Omega$ . Also

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\mathcal{O}} d\Omega = 4\pi. \quad (\text{I.48})$$

Dies ist unabhängig von der Form von  $\mathcal{O}$ . Durch Superposition erhält man den **physikalischen Gaußschen Satz**

$$\boxed{\int_{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{x}') d^3x' = 4\pi Q} \quad (\text{I.49})$$

wobei  $Q$  die Gesamtladung innerhalb von  $\mathcal{O}$  ist. Mit dem mathematischen Gaußschen Satz folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi \rho(\mathbf{x}). \quad (\text{I.50})$$

Die kann man auch gewinnen, indem man die Divergenz von (I.45) nimmt und

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{I.51})$$

benutzt.

Wir haben (I.50) für ruhende Ladungen hergeleitet. Die Gleichung gilt aber auch für bewegte Ladungen, d. h. für *zeitabhängiges*  $\mathbf{E}$  und  $\rho$ :

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{I.52})$$

Aus (I.52) kann man aber *nicht* auf (I.45) für zeitabhängiges  $\rho$  und  $\mathbf{E}$  schließen. In (I.45) ist nämlich noch enthalten, daß die Coulombkraft eine konservative Kraft ist, d. h.<sup>1</sup>

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}_C = 0. \quad (\text{I.53})$$

Für konservative Kräfte verschwindet das Integral über einen geschlossenen Weg, also für  $\mathbf{F}_C$ :



$$\int_c \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{I.54})$$

oder wegen  $\mathbf{F}_C = q\mathbf{E}$

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{I.55})$$

und damit

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{I.56})$$

Falls das betrachtete Gebiet im  $\mathbb{R}^3$  *sternförmig* ist, existiert dann eine Funktion  $\varphi(\mathbf{x})$  so daß<sup>2</sup>

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}). \quad (\text{I.57})$$

Da

$$-\operatorname{grad}_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (\text{I.58})$$

sieht man

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{I.59})$$

$\varphi$  heißt **elektrostatisches Potential**. Als **elektrische Spannung** zwischen zwei Punkten 1, 2 definiert man

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2). \quad (\text{I.60})$$

Für *zeitabhängige* Felder sind (I.54) und (I.55) aber i. a. *nicht* richtig! Im zeitabhängigen Fall kann ein geladenes Teilchen, das einen geschlossenen Weg umläuft, Energie gewinnen.

<sup>1</sup>Diese Gleichung gilt allgemein für Zentralkräfte  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r)\mathbf{x}$ , wobei  $r = |\mathbf{x}|$ , denn mit

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F_i = f(r)\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{r} \frac{df}{dr} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_k$$

folgt  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ .

<sup>2</sup>Auf sternförmigen Gebieten kann man ein solches  $\varphi$  z. B. durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{a}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dt$$

für ein konservatives  $\mathbf{a}$  konstruieren.

Experimentell findet man: durch zeitliche Änderung des Magnetfeldes können Ladungen beschleunigt werden. Wir betrachten dazu die **elektromotorische Kraft (EMK)**  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ . Es gilt das **Faradaysche Induktionsgesetz**

$$\boxed{\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}} \quad (\text{I.61})$$

worin  $\mathcal{F}$  irgendeine von  $C$  berandete Fläche ist,  $C = \partial\mathcal{F}$ . In Worten: Die elektrische Randspannung (bzw. EMK) ist gleich  $1/c$  mal der Abnahme des magnetischen Flusses durch  $\mathcal{F}$ .

Das Minuszeichen im Induktionsgesetz impliziert die **Lenzsche Regel**. Der durch die induzierte Spannung hervorgerufene Strom in einem Leiter entlang  $C$  erzeugt ein Magnetfeld, das der Änderung von  $\mathbf{B}$  entgegenwirkt.

Bei festgehaltener Fläche  $\mathcal{F}$  ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\mathcal{F}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.62})$$

Aus dem Induktionsgesetz wird dann mit dem Satz von Stokes

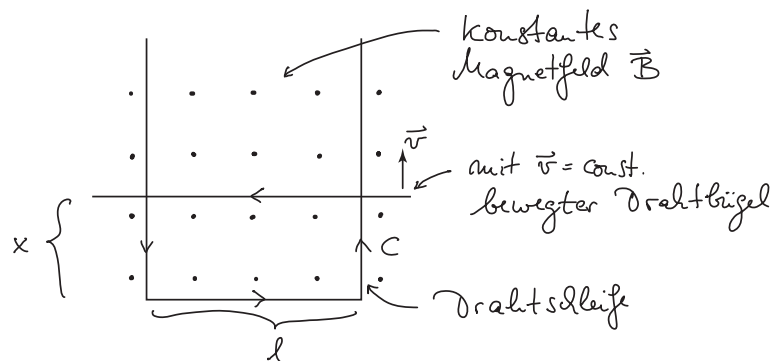
$$\boxed{\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{I.63})$$

Wir können also die Divergenz (d. h. die Quellen) und die Rotation (d. h. die Wirbel) des elektrischen Feldes aus dem experimentell gefundenen Coulombgesetz und Induktionsgesetz ableiten.

Die Konstante  $-\frac{1}{c}$  im Induktionsgesetz folgt aus der Lorentzkraft und der Galilei-Invarianz! Um das zu zeigen, betrachten wir einen speziellen Fall (in dem wir sogar das Induktionsgesetz aus der Lorentzkraft erhalten – was allgemein nicht so ist). Wir vergleichen

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$$

für folgende Anordnung:



Im Ruhesystem des Drahtbügels sieht ein Beobachter das elektrische Feld

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (\text{I.64})$$

was aus der Galilei-Invarianz folgt, siehe (I.5). Damit wird das Linienintegral (da  $\mathbf{E}'$  und  $d\mathbf{x}'$  antiparallel)

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}' = -|\mathbf{E}'|l = -\frac{1}{c} vBl, \quad (\text{I.65})$$



wobei nur auf dem Bügel  $\mathbf{E}' \neq 0$ , während die anderen drei Teilstrecken von  $\mathcal{C}$  nicht zum Integral beitragen. Andererseits ist

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = Blx, \quad (\text{I.66})$$

weshalb

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv. \quad (\text{I.67})$$

Der Vergleich von (I.65) und (I.67) ergibt gerade das Induktionsgesetz. Beachte aber: dies ist *keine* allgemeine Herleitung des Induktionsgesetzes, nur eine Überprüfung in einem einfachen Fall. Obige Rechnung reicht aber aus, um die Konstante im Induktionsgesetz als  $-\frac{1}{c}$  zu identifizieren.

Wichtig: das Induktionsgesetz gilt auch relativistisch! (Dann gelten natürlich andere Transformationen, es ist  $\mathbf{E}' \neq \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .) Mit den richtigen Lorentztransformationen gilt dann weiterhin das Induktionsgesetz. Die Galilei-Invarianz war dennoch hinreichend, um die Konstante  $-\frac{1}{c}$  zu bestimmen.

### I.6.b Grundgesetze für das magnetische Feld

Entscheidender experimenteller Erfahrungssatz ist:

■ Es gibt keine magnetischen Ladungen oder magnetischen Monopole!

*Nebenbemerkung:* Man kann zeigen, daß die Existenz von magnetischen Monopolen notwendig die Quantisierung der *elektrischen* Ladung bedingen würde, für die es bisher keine zufriedenstellende Erklärung gibt. Man erwartet aus verschiedenen Gründen ( $\rightarrow$  Elementarteilchenphysik, Kosmologie), daß magnetische Monopole – falls sie existieren – im Universum nur sehr dünn verteilt und außerdem sehr schwer sein müssen: mindestens  $10^3$  Protonmassen.

Die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen impliziert

$$\boxed{\int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0} \quad (\text{I.68})$$

für jede beliebige Oberfläche  $\mathcal{O}$ , oder anders ausgedrückt:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \quad (\text{I.69})$$

also die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes.

Uns fehlt damit nur noch die Bestimmung von  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ . Die Erfahrung sagt, daß es zwei mögliche Ursachen für magnetische Felder gibt: 1) permanente Magnete, 2) bewegte Ladungen bzw. Ströme (Hans Christian Ørsted, 1820). Nach der *Ampèreschen Hypothese* läßt sich dabei 1) auf 2) zurückführen: permanente Magnete entstehen durch atomare Kreisströme. Das ist aber *nur bedingt* richtig. Z.B. erfordert die Erklärung des Paramagnetismus (und allgemein die vollständige Erklärung von Dia-, Para- und Ferromagnetismus) einen intrinsisch quantenmechanischen Effekt: den **Spin** des Elektrons, der ein magnetisches Moment verursacht. Richtig ist aber:

■ Alle magnetischen Felder können auf bewegte Ladungen und quantenmechanische Spins zurückgeführt werden.

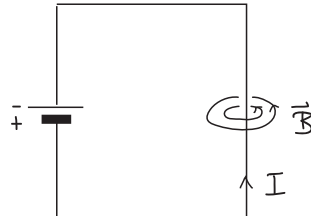
Wir definieren die **Stromstärke**

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{I.70})$$

= pro Zeiteinheit durch festen Querschnitt fließende Ladung.

Für das Magnetfeld *konstanter* Ströme gilt das **Ørsted'sche Gesetz**

$$\int_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (\text{I.71})$$



Wir definieren weiter die **Stromdichte  $\mathbf{j}$**  durch

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.72})$$

bzw.

$$|\mathbf{j}| = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \times \text{Fläche} \perp \text{zur Stromrichtung}}. \quad (\text{I.73})$$

Dann ist

$$I = \int_O \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.74})$$

In einem Leiter mit  $n$  geladene Teilchen pro Volumen mit den Ladungen  $q$ , die sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegen, gilt z. B.

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}, \quad (\text{I.75})$$

und mit der Ladungsdichte  $\rho = nq$

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}, \quad (\text{I.76})$$

Mit (I.74) erhalten wir aus (I.71) das **Ampère'sche Gesetz**

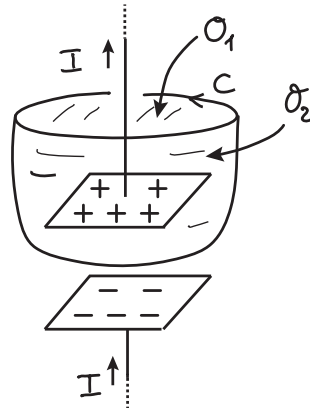
$$\boxed{\int_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_O \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}} \quad (\text{I.77})$$

und daraus nach Stokes

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}} \quad (\text{I.78})$$

Beides gilt *nur* für *konstante* Ströme  $\mathbf{j}$ . Maxwells Entdeckung (1865) war: für *zeitabhängige* Ströme gilt dieses Gesetz nicht!

Als typisches Beispiel betrachten wir die Entladung eines Kondensators:



Die Fläche  $\mathcal{O}_1$  wird vom Strom  $I(t)$  durchstoßen. Fläche  $\mathcal{O}_2$  verläuft zwischen den Kondensatorplatten und wird *nicht* von Strom durchflossen. Beide Flächen werden aber von *derselben* Kurve  $\mathcal{C}$  begrenzt. Daher gilt einerseits

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{O}_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} I(t), \quad (\text{I.79})$$

andererseits aber im Widerspruch dazu

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{O}_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (\text{I.80})$$

Zur Behebung dieses Widerspruchs muß man die Änderung des elektrischen Feldes zwischen den Platten berücksichtigen. Richtig ist:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}, \quad (\text{I.81})$$

bzw. in differentieller Form:

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.82})$$

Man bezeichnet  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  als (Maxwellsche) **Verschiebungsstromdichte**.<sup>3</sup>

### I.6.c Maxwell-Gleichungen

Damit haben wir die **Maxwell-Gleichungen in integraler Form**:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho d^3x = 4\pi Q \quad (\text{I.83})$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.84})$$

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.85})$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (\text{I.86})$$

<sup>3</sup>Dieser Name ist nur wenig sinnvoll aber üblich.

Dabei sind die Integrale auf der linken Seite jeweils über Flächen bzw. Kurven zu nehmen, die die Volumina bzw. Flächen beranden, über die die Integrale der rechten Seite zu nehmen sind.

In **differentieller Form** lauten die Maxwell-Gleichungen (Maxwell, 1865)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{I.87})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{I.88})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.89})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.90})$$

- Die Gleichungen der differentiellen Form sind partielle Differentialgleichungen *erster Ordnung* in den Koordinaten und der Zeit.
- Die Gleichungen sind *linear* in den Feldern, was das Superpositionsgesetz für die elektrischen und magnetischen Felder reflektiert.
- Die Gleichungen sind *gekoppelt*.
- Die integrale Form und die differentielle Form sind äquivalent.
- Obige Gleichungen werden oft auch als 'Maxwell-Gleichungen in Vakuum' bezeichnet. Das ist zwar richtig, sie gelten aber auch in Materie. Sie gelten sogar immer! Zur Beschreibung von Materie muß man dann jedoch in der Ladungsdichte und der Stromdichte alle Beiträge berücksichtigen, also frei bewegliche Ladungsdichte und Polarisationsladungsdichte sowie frei bewegliche Stromdichte, Polarisations- und Magnetisierungsstromdichte.
- Die beiden Gleichungen, die  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  enthalten, werden als **inhomogene Maxwell-Gleichungen** bezeichnet. Die beiden Gleichungen, die  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  nicht enthalten, werden als **homogene Maxwell-Gleichungen** bezeichnet.

#### I.6.d Signifikanz des Maxwellschen Verschiebungsstroms

Aufgrund des Maxwellschen Verschiebungsstromes gibt es auch im Vakuum, d. h. für  $\rho = 0$  und  $\mathbf{j} = 0$ , *nicht-verschwindende* Lösungen der Maxwell-Gleichungen, nämlich die elektromagnetischen Wellen. Dies wäre ohne den Verschiebungsstrom nicht der Fall. Denn dann folgt aus

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

nach dem Fundamentalsatz, daß  $\mathbf{B} = 0$ . Dann wäre aber

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

und demzufolge auch  $\mathbf{E} = 0$ .

Die Existenz des Maxwellschen Verschiebungsstroms erlaubt dagegen, daß sich elektrische und magnetische Felder gegenseitig erzeugen und aufrechterhalten.

## I.7 Kontinuitätsgleichung

Es gilt die **Erhaltung der Ladung**:

■ Ladung kann nicht erzeugt oder vernichtet werden.

In einem Volumen  $V$  ist die Gesamtladung

$$Q = \int_V \rho d^3x. \quad (\text{I.91})$$

Sie kann sich nur durch das Aus- oder Einströmen von Ladung ändern, so daß

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = \frac{d}{dt} Q = - \int_{\mathcal{O}(V)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.92})$$

Das Vorzeichen stammt daher, daß  $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} > 0$ , falls  $\mathbf{j}$  nach außen gerichtet ist. Mit dem Gaußschen Satz erhalten wir die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0} \quad (\text{I.93})$$

Wichtig ist, daß die Kontinuitätsgleichung die *lokale* Erhaltung der Ladung beschreibt. Wäre Ladung nur *global* erhalten, könnte eine Ladung z. B. hier verschwinden und gleichzeitig irgendwo anders auftauchen. Dies entspricht nicht der experimentellen Beobachtung und ist gemäß der Kontinuitätsgleichung ausgeschlossen.

## I.8 Gleichungen der klassischen Elektrodynamik, Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen

Die klassische Elektrodynamik wird durch die Maxwell-Gleichungen und das Newtonsche Gesetz

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (\text{I.94})$$

mit der Lorentzkraft  $\mathbf{F}$  beschrieben.

Für Materie, die aus Punktteilchen mit Ladungen  $q_i$  und Massen  $m_i$  besteht,

$$\rho_i = q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad \mathbf{j}_i = \rho_i \mathbf{v}_i(t) \quad (\text{I.95})$$

mit

$$\rho = \sum_i \rho_i, \quad \mathbf{j} = \sum_i \mathbf{j}_i, \quad (\text{I.96})$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i, t) \\ &= q_i \left[ \mathbf{E}(\mathbf{x}_i, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i, t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.97})$$

Die Maxwell-Gleichungen alleine (ohne Lorentzkraft) stellen 8 Komponentengleichungen für 6 Komponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  dar. Die Gleichungen können also nicht unabhängig sein. Tatsächlich findet man, daß die Divergenz von (I.88) wegen  $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$  ergibt

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (\text{I.98})$$

wobei im zweiten Schritt die Gleichung (I.87) benutzt wurde. Wir erhalten also hier die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (\text{I.99})$$

die offenbar in den Maxwell-Gleichungen enthalten ist.

Wir erkennen aber auch in (I.98), daß

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0. \quad (\text{I.100})$$

Wenn also die Maxwell-Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  zu einem Zeitpunkt erfüllt ist, so garantiert die Maxwell-Gleichung (I.88), daß dies zu allen Zeitpunkten der Fall ist.

Ähnlich folgt aus der Divergenz von (I.89)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{B}) = 0. \quad (\text{I.101})$$

Wenn also Gleichung (I.90) zu einem Zeitpunkt erfüllt ist, so ist sie es aufgrund (I.89) immer.

Wir können daher die beiden 'nicht-dynamischen' Maxwell-Gleichungen (I.87) und (I.90) als Neben- oder Zwangsbedingungen auffassen. Das Verschwinden ihrer Zeitableitung wird durch die anderen beiden Gleichungen gesichert.

Die Abhängigkeit der Maxwell-Gleichungen kann man auch folgendermaßen betrachten: Die Gleichungen (I.88) und (I.89) erlauben die Berechnung von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , falls  $\mathbf{j}$  zu allen Zeiten, und  $\mathbf{E}(t=0)$  und  $\mathbf{B}(t=0)$  gegeben sind und bei  $t=0$  (I.87) und (I.90) erfüllt sind.  $\rho$  folgt dann aus der Kontinuitätsgleichung.

## I.9 Elektrostatische Feldenergie, Grenzen der Gültigkeit der klassischen Elektrodynamik

Die klassische Elektrodynamik enthält innere Widersprüche und führt zu Inkonsistenzen, wenn man sie auf mikroskopische Skalen extrapoliert. Dies können wir zum Beispiel erkennen, wenn wir die elektrostatische Energie einer Ladung betrachten.

In der klassischen Mechanik betrachtet man nur Beiträge zur potentiellen Energie, die durch die Wechselwirkung (d. h. durch die Kräfte) zwischen *verschiedenen* Teilchen oder Körpern entstehen. Gemäß diesem Bild ist die potentielle Energie einer Anzahl  $N$  von Ladungen  $q_i$  an Orten  $\mathbf{x}_i$

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_{(\text{ohne } i)}(\mathbf{x}_i). \quad (\text{I.102})$$

Die Bedingung  $i \neq j$  in der zweiten Summe besagt, daß wir die Selbstenergie weglassen, der Faktor  $1/2$  gleicht aus, daß wir in der Summe jedes Paar von Ladungen zweifach zählen.

Das Subscript 'ohne  $i$ ' soll anzeigen, daß das von der Ladung  $i$  selbst erzeugte Feld nicht berücksichtigt werden soll. Die auf die Ladung  $i$  wirkende Kraft ist dann

$$\mathbf{K}_i = -\text{grad}_{\mathbf{x}_i} U = q_i \mathbf{E}_{(\text{ohne } i)}(\mathbf{x}_i) \quad (\text{I.103})$$

Offenbar ist  $U$  für den Fall zweier Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens negativ und für den Fall zweier Ladungen gleichen Vorzeichens positiv.

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen finden wir

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' \\ &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \int (\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x}) d^3x, \end{aligned} \quad (\text{I.104})$$

wobei wir im letzten Schritt die Maxwellgleichung  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$  benutzt haben. Im Kontinuum erscheint es nicht notwendig, die Wirkung der Ladung auf sich selber auszunehmen, da sie jeweils nur einem Punkt entspricht – also einer Nullmenge, die für das Integral nicht relevant sein sollte. (Abgesehen davon würde es die Formulierung des Integrals sehr kompliziert machen.) Mit  $\text{div}(\phi\mathbf{a}) = \phi \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{grad } \phi$  (siehe Übungen) und dem Gaußschen Satz für einen der damit erhaltenen Terme finden wir weiter

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} - \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) d^3x \quad (\text{I.105})$$

Betrachten wir hier eine Fläche  $\mathcal{F}$ , die alle Ladungen einschließt, etwa eine Kugel vom Radius  $R$ , so finden wir für  $R \rightarrow \infty$

$$\varphi \sim \frac{1}{R}, \quad E \sim \frac{1}{R^2}, \quad df \sim R^2, \quad (\text{I.106})$$

so daß das Integral über  $\mathcal{F}$  für  $R \rightarrow \infty$  verschwindet, da der Integrand überall gegen Null geht. Damit erhalten wir aus (I.105) mit  $\text{grad } \varphi = -\mathbf{E}$  die **elektrostatische Energie** einer Ladungsverteilung  $\rho$ :

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) d^3x = \int u(\mathbf{x}) d^3x, \quad (\text{I.107})$$

mit der **Energiedichte**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2. \quad (\text{I.108})$$

Hier ist aber  $u(\mathbf{x}) \geq 0$  und damit  $U \geq 0$  auch für Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens! Dies widerspricht unserer obigen Überlegung für endlich viele Einzelladungen. Der Beitrag, der hier die Positivität von  $U$  bewirkt, kommt offenbar aus dem Selbstenergiebeitrag, der im Integral zunächst nicht erheblich erschien.

Das Problem der klassischen Elektrodynamik liegt tatsächlich darin, daß jede Ladung ein **Feld** erzeugt, das dann (tatsächlich!) auf die Ladung selber wirkt. Den entsprechenden Beitrag zur Energie nennt man die **Selbstenergie** der Ladung.

Die Selbstenergie ist schon für eine einzelne punktförmige Ladung unendlich. Betrachten wir zum Beispiel ein Elektron, das bei  $\mathbf{x} = 0$  ruht. Dann ist

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = q \left. \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right|_{\mathbf{x}=0} = \infty \quad (\text{I.109})$$

und die Selbstenergie des Elektrons

$$U_1 = \frac{e^2}{2} \int \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{e^2}{2} \int \frac{1}{|\mathbf{x}|} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) d^3x = \infty. \quad (\text{I.110})$$

Es hat (zwecklose) Versuche gegeben, dieses Problem zu umgehen, indem man das Elektron als ausgedehntes Teilchen annimmt, z. B. als Kugel vom Radius  $R_0$  mit homogener Ladungsdichte. Zum einen wäre eine solche Ladungsverteilung im Rahmen der Elektrodynamik instabil, da zusätzliche (nicht elektrodynamische) Kräfte erforderlich wären, um sie zusammenzuhalten. Das Modell führt zu einer Selbstenergie von (s. Übungen)

$$\frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0}. \quad (\text{I.111})$$

(Eine auf einer Kugeloberfläche vom Radius  $R_0$  homogen angenommene Ladungsverteilung ergäbe  $\frac{1}{2} \frac{e^2}{R_0}$ .)

Die Überlegung, daß die Ruhemasse  $m_e$  des Elektrons vollständig durch die Selbstenergie generiert wird,

$$m_e c^2 = U_1 \quad (\text{I.112})$$

führt dann zur Abschätzung für einen **klassischen Elektronradius** von

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \simeq 2,82 \cdot 10^{-15} \text{m}. \quad (\text{I.113})$$

Experimentell weiß man aber, daß das Elektron mindestens um einen Faktor 100 kleiner ist. (Soweit man weiß, ist es sogar punktförmig.) Daher ist ein solches Modell zum anderen auch experimentell widerlegt.

Die wirkliche Lösung des Problems liegt in der Quantenmechanik bzw. Quantenfeldtheorie, wo diese Unendlichkeiten in der Theorie der **Renormierung** (entwickelt von Feynman, Schwinger und Tomonaga) behandelt werden können.<sup>4</sup> Die klassische Elektrodynamik muß bei Abständen unterhalb der Größenordnung  $r_0$  durch die Quantenmechanik ergänzt bzw. durch die Quantenelektrodynamik ersetzt werden.

<sup>4</sup>Die Summe der (formal unendlichen) *nackten Masse* des Elektrons und ihrer (ebenfalls formal unendlichen) *Quantenkorrektur* ergibt dabei die endliche und experimentell gemessene Masse  $m_e$ . Nur diese ist eine meßbare Größe. Die einfachste Quantenkorrektur zur Masse des Elektrons ist gegeben durch das Feynman-Diagramm





## Kapitel II

# Elektrostatisches und magnetostatisches Grundproblem, Randwertprobleme

Als **stationäre** Probleme bezeichnet man solche, bei denen die Zeitableitungen der physikalischen Größen verschwinden, in unserem Fall also die Zeitableitungen der Ladungsdichte  $\rho$ , der Stromdichte  $\mathbf{j}$ , sowie der Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0. \quad (\text{II.1})$$

Man sieht leicht, daß sich in dieser Situation die Maxwell-Gleichungen (I.87)-(I.90) stark vereinfachen: Die Gleichungen für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  entkoppeln und können getrennt behandelt werden. Dies führt zur **Elektrostatik** und **Magnetostatik**.

### II.1 Die Greenschen Formeln und der Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Es gilt der Gaußsche Satz

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d^3x = \int_O \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{II.2})$$

Seien nun  $\phi(\mathbf{x})$  und  $\psi(\mathbf{x})$  zweimal stetig differenzierbare skalare Funktionen. Wir setzen

$$\mathbf{v} = \phi \operatorname{grad} \psi, \quad (\text{II.3})$$

so daß wegen  $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi + \phi \Delta \psi, \quad (\text{II.4})$$

worin wir den Laplace-Operator  $\Delta$  verwendet haben, der durch  $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$  definiert ist. Einsetzen in den Gaußschen Satz (II.2) ergibt die **1. Greensche Formel**

$$\boxed{\int_V (\operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi + \phi \Delta \psi) d^3x = \int_O \phi \operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{f}} \quad (\text{II.5})$$

Vertauschen wir hierin  $\phi$  und  $\psi$  und subtrahieren die erhaltene Formel von der vorherigen, ergibt sich die **2. Greensche Formel** oder das **Greensche Theorem**

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3x = \int_{\mathcal{O}} (\phi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \phi) \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{II.6})$$

Es ist  $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$  und

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \psi = (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad})\psi =: \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (\text{II.7})$$

Die so definierte Notation  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$  bezeichnet also die Ableitung von  $\psi$  in Richtung der (äußeren) Flächennormalen. Damit wird die zweite Greensche Formel zu

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3x = \int_{\mathcal{O}} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) df \quad (\text{II.8})$$

Falls  $\phi, \psi$  für  $r \rightarrow \infty$  mit  $1/r$  verschwinden, so<sup>1</sup>

$$\phi \operatorname{grad} \psi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad \text{bzw.} \quad \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (\text{II.11})$$

Da weiter  $df \sim r^2$  für  $r \rightarrow \infty$ , verschwindet der Integrand in den Oberflächenintegralen in beiden Greenschen Formeln, wenn das Volumen groß gemacht wird. Daher werden die Greenschen Formeln für den Spezialfall  $V = \mathbb{R}^3$ :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi d^3x = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi \Delta \psi d^3x \quad (\text{II.12})$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi \Delta \phi d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \phi \Delta \psi d^3x \quad (\text{II.13})$$

Wir wollen nun den folgenden **Fundamentalsatz** beweisen:

A) Zu vorgegebenen Quellen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 4\pi\rho \quad (\text{II.14})$$

und Wirbeln

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{II.15})$$

gibt es genau ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$ , wenn

a)  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  außerhalb einer endlichen Kugel verschwinden und

b)  $\mathbf{v}$  wie  $\frac{1}{r^2}$  für  $r \rightarrow \infty$  abfällt (*Regularität*).

B) Ein Vektorfeld mit  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ , das a) und b) erfüllt, verschwindet überall,  $\mathbf{v} = 0$ .

<sup>1</sup>Die hier verwendete Notation

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{II.9})$$

ist definiert als die Bedingung

$$\exists_{C,a>0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C \quad \text{für} \quad x > a. \quad (\text{II.10})$$

Zum Beweis wollen wir zunächst die Eindeutigkeit der Lösung betrachten, die Existenz zeigen wir durch Konstruktion, siehe unten.

Angenommen, es gibt zwei verschiedene Vektorfelder  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$  mit obigen Eigenschaften, d. h.  $\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 4\pi\rho$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ . Dann ist  $\mathbf{u} := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \neq 0$  und es gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{v}_1 - \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0, \tag{II.16}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 - \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0. \tag{II.17}$$

Weiter gilt  $\mathbf{u} = \mathcal{O}(1/r^2)$  für  $r \rightarrow \infty$ . Wegen  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$  existiert ein  $\phi$  mit  $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \phi$ . Wegen  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  gilt dann  $\Delta\phi = 0$ . Weiter ist  $\phi = \mathcal{O}(1/r)$  für  $r \rightarrow \infty$ . Mit der Wahl  $\psi = \phi$  sagt uns die 1. Greensche Formel in der Version (II.12), daß

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{grad} \phi)^2 d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}^2 d^3x = 0, \tag{II.18}$$

und damit  $\mathbf{u} = 0$  entgegen der Annahme, daß  $\mathbf{u} \neq 0$ . Daraus folgern wir, daß  $\mathbf{v}$  eindeutig ist. Da das gerade diskutierte  $\mathbf{u}$  gerade die in B) genannten Voraussetzungen erfüllt, folgt auch diese Aussage aus obiger Argumentation.  $\square$

In diesem Beweis sind wir der **Laplace-Gleichung** begegnet.

$$\boxed{\Delta\phi = 0} \tag{II.19}$$

Die Lösungen der Laplace-Gleichung heißen **harmonische Funktionen**.

Wir finden aufgrund obiger Argumentation: Jede Lösung  $\phi$  der Laplace-Gleichung (d. h. jede harmonische Funktion), die wie  $1/r$  für  $r \rightarrow \infty$  abfällt, ist identisch Null. Denn wegen der 1. Greenschen Formel ist dann  $\operatorname{grad} \phi = 0$ , und damit  $\phi = \text{const.}$  Diese Konstante muß aber Null sein, da sonst  $\phi$  nicht wie  $1/r$  für  $r \rightarrow \infty$  abfallen würde. Also  $\phi = 0$ .

Beachte: Der Eindeutigkeitsbeweis war nur möglich mit der Voraussetzung, daß  $\phi = \mathcal{O}(1/r)$  und  $\mathbf{v} = \mathcal{O}(1/r^2)$  für  $r \rightarrow \infty$ , denn alle Funktionen der Form (in sphärischen Polarkoordinaten)

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{II.20}$$

mit reellen Koeffizienten  $a_{lm}$  und den **Kugelflächenfunktionen**  $Y_{lm}$ , die wir später kennenlernen, erfüllen  $\Delta\phi = 0$ , aber *nicht*  $\phi = \mathcal{O}(1/r)$  für  $r \rightarrow \infty$ .

## II.2 Konstruktion der Felder aus vorgegebenen Quellen und Wirbeln

Allgemein möchten wir aus den (als bekannt angenommenen) Quellen und Wirbeln eines Vektorfeldes dieses Feld konstruieren. Wir gehen dabei der Reihe nach vor:

- a) Konstruktion von  $\mathbf{E}$  aus vorgegebenen Quellen, falls  $\mathbf{E}$  wirbelfrei ist,
- b) Konstruktion von  $\mathbf{B}$  aus vorgegebenen Wirbeln, falls  $\mathbf{B}$  quellenfrei ist,
- c) Konstruktion für allgemeine Quellen und Wirbel.

Dabei wollen wir immer annehmen, daß Wirbel und Quellen außerhalb einer Kugel von endlichem Radius verschwinden.

Die beiden Probleme a) und b) resultieren gerade aus den Maxwell-Gleichungen für zeitunabhängige (stationäre) Situationen.

### II.2.a Elektrostatische Grundaufgabe

Es sei

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{II.21})$$

Aus der Wirbelfreiheit ( $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ ) folgt, daß ein  $\varphi$  existiert mit<sup>2</sup>

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla\varphi. \quad (\text{II.22})$$

Daher gilt die **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad (\text{II.23})$$

Wir betrachten zunächst den Fall einer Punktladung<sup>3</sup>

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (\text{II.24})$$

und erhalten dann eine Poisson-Gleichung der Form

$$\Delta G(\mathbf{x}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (\text{II.25})$$

Man nennt  $G(\mathbf{x})$  die **Greensche Funktion der Poisson-Gleichung**. (Beachte, daß die Greensche Funktion im allgemeinen nicht eindeutig ist, denn auch  $G + F$  mit jedem  $F$ , das  $\Delta F = 0$  erfüllt, ist eine Greensche Funktion. Für die Eindeutigkeit sind die Randbedingungen an die Greensche Funktion entscheidend.) Aufgrund der Rotationssymmetrie einer Punktladung ist

$$G(\mathbf{x}) = G(r) \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (\text{II.26})$$

Mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  (siehe Übungen)

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

mit

$$\Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (\text{II.28})$$

findet man (siehe Übungen), daß

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \quad (\text{II.29})$$

die eindeutige Lösung ist, die für  $r \rightarrow \infty$  wie  $1/r$  verschwindet. Daher löst

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{II.30})$$

<sup>2</sup>Wir verwenden auch gelegentlich die Nabla-Schreibweise für die Differentialoperatoren  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$ :  $\operatorname{grad} \phi = \nabla\phi$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$ ,  $\Delta = \nabla^2$ .

<sup>3</sup>Die folgende Wahl von  $\rho$  ohne eine Ladungseinheit entspricht nicht der physikalischen Situation einer Punktladung, so daß  $\mathbf{E}$  auch kein elektrisches Feld darstellt. Sobald wir zu Ladungsdichten übergehen (ab Gl. (II.32)), haben wir es wieder mit echten Ladungen und Feldern zu tun.

die Gleichung

$$\Delta_x G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{II.31})$$

mit der Randbedingung des Abfalls wie  $1/r$  für  $r \rightarrow \infty$ .

Damit erhalten wir eine Lösung der Poisson-Gleichung, denn

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\mathbf{x}) &= -4\pi\rho(\mathbf{x}) \\ &= -4\pi \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \int \Delta_x G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \Delta \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x', \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

worin  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  durch (II.30) gegeben ist. Also löst

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{II.33})$$

die Poisson-Gleichung  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  mit  $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ . Daher

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad}_x \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (\text{II.34})$$

so daß wir das Coulomb-Gesetz

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (\text{II.35})$$

erhalten. Dies ist die eindeutige Lösung.

## II.2.b Magnetostatische Grundaufgabe

In der magnetostatischen Grundaufgabe sind die Wirbel von  $\mathbf{B}$  gegeben, und die Quellen verschwinden:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \text{und} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{II.36})$$

Es ist  $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$  für jedes beliebige Vektorfeld  $\mathbf{A}$ . Man kann daher versuchen, ein quellenfreies  $\mathbf{B}$  als Rotation darzustellen:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (\text{II.37})$$

$\mathbf{A}$  heißt **Vektorpotential** (in Analogie zum skalaren Potential  $\varphi$  in der elektrostatischen Grundaufgabe). Man kann zeigen: jedes divergenz-freie Vektorfeld läßt sich so darstellen. (Bei uns wird im folgenden die Existenz durch Konstruktion gezeigt.)

Man sieht, daß das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  *nicht* eindeutig bestimmt ist! Mit  $\mathbf{A}$  ergibt nämlich auch

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi(\mathbf{x}) \quad (\text{II.38})$$

dasselbe  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}'$ , da  $\text{rot grad } \chi = 0$  wenn  $\chi$  eine differenzierbare *skalare* Funktion ist.

Wir nennen die Transformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi(\mathbf{x}) \quad (\text{II.39})$$

eine **Eichtransformation**. Alle Eichtransformationen bilden eine Gruppe, die **Eichgruppe**. Die Feldstärke  $\mathbf{B}$  ist *invariant* unter den Eichtransformationen:  $\mathbf{B}$  ist **eichinvariant**. Man kann  $\chi(\mathbf{x})$  so wählen, daß die zu lösenden Gleichungen möglichst einfach werden.

Ähnliches gilt für das elektrische Potential  $\varphi$ . Auch  $\varphi$  kann durch

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi + c \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (\text{II.40})$$

umgekehrt werden, ohne daß sich  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  ändert.

Wir werden sehen: die Lagrange- und Hamiltonfunktion involvieren die Potentiale  $\mathbf{A}$  und  $\varphi$ , z. B.

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi. \quad (\text{II.41})$$

Sie sind daher auch in der Quantenmechanik und in der Quantenelektrodynamik sehr wichtig.

Zur Berechnung von  $\mathbf{A}$  beobachten wir, daß aus  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  folgt

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{II.42})$$

Zur Vereinfachung führen wir eine Eichtransformation durch, so daß  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ . Dies ist immer möglich: Nehmen wir

$$\text{div } \mathbf{A} = \eta \neq 0 \quad (\text{II.43})$$

an, dann suchen wir ein  $\chi(\mathbf{x})$  so daß

$$\text{div}(\mathbf{A} + \text{grad } \chi) = \eta + \Delta \chi = 0. \quad (\text{II.44})$$

Dies ist aber gerade die Poisson-Gleichung mit der Lösung (s. o.)

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\eta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (\text{II.45})$$

(Beachte, daß auch  $\chi$  nicht eindeutig bestimmt ist, denn  $\chi + \tilde{\chi}$  mit  $\Delta \tilde{\chi} = 0$  ergibt dasselbe  $\mathbf{A}'$ .) Wählen wir also  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi$ , so ist

$$\text{div } \mathbf{A}' = 0. \quad (\text{II.46})$$

Die Eichung  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  heißt **Coulomb-Eichung** oder **transversale Eichung** oder **Strahlungseichung**.

Damit vereinfacht sich (II.42) zu

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (\text{II.47})$$

d. h. jede Komponente von  $\mathbf{A}$  erfüllt die Poisson-Gleichung. Daher ist die eindeutige Lösung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (\text{II.48})$$

Für das Magnetfeld  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  ist also

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \text{rot}_x \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \left( \text{grad}_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x', \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

worin  $\text{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad } \varphi$  benutzt wurde. Wir erhalten damit das **Gesetz von Biot und Savart**

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'} \quad (\text{II.50})$$

Wir sollten uns nachträglich noch einmal überzeugen, daß der Ansatz  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  allgemein möglich war, indem wir explizit die Rotation von (II.48) ausrechnen und daraus  $\mathbf{B}$  erhalten. Dies ist (natürlich ohne Verwendung des aus (II.48) erhaltenen (II.50)!) durch Anwendung der (stationären) Maxwell-Gleichungen und partieller Integration tatsächlich möglich (siehe auch Übungen):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \nabla_x \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \left( \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= -\frac{1}{c} \int \left( \nabla_{x'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla_{x'} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' && \text{(part. Int.)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \text{rot rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}') d^3x' && \text{(Maxwell-Gl.)} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Delta_{x'} \mathbf{B}(\mathbf{x}') d^3x' && \text{(div } \mathbf{B} = 0) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B}(\mathbf{x}') \Delta_{x'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' && \text{(zweimalige part. Int.)} \\ &= \int \mathbf{B}(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x' \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

### II.2.c Allgemeiner Fall vorgegebener Quellen und Wirbel

Betrachten wir zuletzt den allgemeinen Fall, daß für ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$  die Quellen und Wirbel vorgegeben sind,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 4\pi\rho \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Dieser Fall tritt in der Elektro- und Magnetostatik nicht auf, ist aber von allgemeinem Interesse.

Man kann dieses Problem lösen, indem man das Vektorfeld zerlegt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t, \quad (\text{II.53})$$

wobei  $\mathbf{v}_l$  der wirbelfreie Anteil ist,

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_l = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_l = 0, \quad (\text{II.54})$$

und  $\mathbf{v}_t$  der quellenfreie Anteil,

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_t = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_t = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{II.55})$$

Eine solche Zerlegung ist in der Tat immer möglich, wenn auch nicht eindeutig.<sup>4</sup>

Für diese beiden Anteile kann man Lösungen nach den in a) und b) hergeleiteten Verfahren finden,

$$\mathbf{v}_l = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (\text{II.58})$$

bzw.

$$\mathbf{v}_t = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (\text{II.59})$$

so daß auch das Problem eines Vektorfeldes mit Quellen und Wirbeln gelöst werden kann.

Im Fundamentalsatz in Abschnitt II.1 war angenommen, daß das gesuchte Vektorfeld  $\mathbf{v}$  wie  $\frac{1}{r^2}$  für  $r \rightarrow \infty$  abfällt. Wir müssen uns noch überzeugen, daß dies auf die in der elektrostatischen und der magnetostatischen Grundaufgabe betrachteten Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  tatsächlich zutrifft, daß also

$$|\mathbf{E}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{und} \quad |\mathbf{B}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (\text{II.60})$$

Dies werden wir in den beiden folgenden Kapiteln erkennen.

Abschließend stellen wir noch einmal die wichtigsten Formeln der Elektro- und Magnetostatik gegenüber und beobachten eine unverkennbare Ähnlichkeit:<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Man bezeichnet den wirbelfreien Anteil  $\mathbf{v}_l$  auch als *longitudinalen Anteil*, den quellenfreien Anteil  $\mathbf{v}_t$  auch als *transversalen Anteil*. Diese Bezeichnung beruht darauf, daß man die Fouriertransformierte

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (\text{II.56})$$

des Vektorfeldes zerlegen kann in zwei Anteile,

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{v}}), \quad (\text{II.57})$$

von denen der erste (entsprechend  $\tilde{\mathbf{v}}_l$ ) proportional zu  $\mathbf{k}$  ist, während der zweite (entsprechend  $\tilde{\mathbf{v}}_t$ ) senkrecht zu  $\mathbf{k}$  ist.  $\mathbf{v}_l$  und  $\mathbf{v}_t$  ergeben sich aus der Rücktransformation.

<sup>5</sup>Wie wir später sehen werden, hat die formale Ähnlichkeit der Gleichungen ihren Grund darin, daß sich die Potentiale  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  einerseits und die Ladungsdichte  $\rho$  und Stromdichte  $\mathbf{j}$  andererseits zu den Größen

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (\text{II.61})$$

zusammenfassen lassen, die sich wie Vierervektoren unter Lorentztransformationen transformieren.



Elektrostatik	Magnetostatik
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$	$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$
$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ mit $\varphi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$	$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ mit $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$
$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' } d^3x'$	$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' } d^3x'$
$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' ^3} d^3x'$	$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' ^3} d^3x'$

## II.3 Randwertaufgaben der makroskopischen Elektrostatik

Beim elektrostatischen Problem sucht man Lösungen der Poissongleichung. Diese sind gemäß (II.33) eigentlich bekannt. Allerdings muß man dafür die Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  vollständig kennen. Das ist aber gerade bei makroskopischen Problemen oft nicht der Fall.

Wichtiges Beispiel hierfür sind Ladungen vor elektrisch leitenden Oberflächen. Hier ist die Bestimmung von  $\rho(\mathbf{x})$  Teil des Problems! Allgemeiner können wir es mit Ladungen zu tun haben, die von einem System von mehreren Flächen umgeben sind.

### II.3.a Elektrische Leiter

Ein **elektrischer Leiter** ist ein Medium, in dem sich frei bewegliche Ladungen befinden. Im Gleichgewicht verteilen sich die Ladungen so, daß auf keine Ladung mehr eine Kraft wirkt.<sup>6</sup> Im Gleichgewicht herrscht daher *im* Leiter kein elektrisches Feld, d. h.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{im Leiter.} \quad (\text{II.62})$$

Also ist das elektrostatische Potential im Leiter konstant,

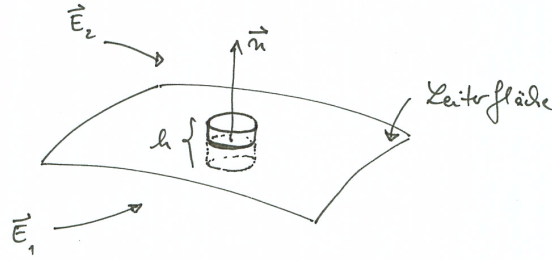
$$\varphi(\mathbf{x}) = \text{const.} \quad \text{im Leiter.} \quad (\text{II.63})$$

Flächen, auf denen das elektrostatische Potential konstant ist, heißen **Äquipotentialflächen**. Flächen in oder auf elektrischen Leitern sind daher im Gleichgewichtszustand Äquipotentialflächen.

Die Feldstärke  $\mathbf{E}$  steht immer senkrecht zu Äquipotentialflächen, wie man leicht an der Beziehung  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  erkennt. Insbesondere steht  $\mathbf{E}$  also immer senkrecht auf Leiteroberflächen.

Zunächst wollen wir allgemein das Verhalten des elektrischen Feldes an einer Leiterfläche untersuchen. Dazu betrachten wir eine kleine zylinderförmige Fläche, die ein Stück der Leiterfläche umschließt.

<sup>6</sup>Da es natürlich thermische Bewegung gibt, ist dies nur *im Mittel* der Fall.



Für die zylinderförmige Fläche gilt der Gaußsche Satz,

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{II.64})$$

Machen wir die Höhe des Zylinders sehr klein,  $h \rightarrow 0$ , so tragen zum Oberflächenintegral nur die Ober- und Unterseite des Zylinders bei. Ist die Ladungsdichte  $\rho$  nur auf der Leiterfläche von Null verschieden, so ist das Volumenintegral über  $\rho$  nur durch die **Flächenladungsdichte**  $\sigma(\mathbf{x})$  bestimmt. Da beide Seiten der Gleichung proportional zur Fläche des Zylinderquerschnitts (bzw. der identischen Fläche der Oberseite) sind, erhalten wir im Grenzwert eines kleinen Zylinders

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 4\pi\sigma, \quad (\text{II.65})$$

wobei  $\mathbf{n}$  wieder der Einheitsnormalenvektor der Leiterfläche ist (und damit entgegengesetzt dem Normalenvektor der Unterseite des Zylinders, der aus dem Zylinder hinaus weist).

Wenn wir annehmen, daß die Leiterfläche die Oberfläche eines Leiters ist, so ist auf der Seite innerhalb des Leiters das elektrische Feld  $\mathbf{E}_1 = 0$ . Daher ist auf der Leiteroberfläche

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi\sigma(\mathbf{x}). \quad (\text{II.66})$$

### II.3.b Randbedingungen für die Poisson-Gleichung

Auf vorgegebenen Flächen kann man verschiedene Randbedingungen an das Potential  $\varphi$  bzw. das Feld  $\mathbf{E}$  stellen. Wir betrachten ein dreidimensionales Gebiet  $V$ , das von Flächen  $\partial V$  berandet wird. Diese Flächen müssen nicht zusammenhängend sein, es können sich etwa geschlossene Flächen innerhalb von  $V$  befinden. Innerhalb von  $V$  befindet sich eine Ladungsverteilung  $\rho$ . Für das Potential gilt innerhalb von  $V$  die Poisson-Gleichung  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ .

Mögliche Randbedingungen an  $\varphi$  sind dann:

#### i) Dirichlet-Randbedingungen

$$\varphi(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial V \text{ gegeben} \quad (\text{II.67})$$

Wichtiges Beispiel hierfür:  $\varphi = \text{const.}$  auf Leiteroberflächen

#### ii) Neumann-Randbedingungen<sup>7</sup>

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{auf } \partial V \text{ gegeben} \quad (\text{II.68})$$

Beispiel hierfür ist etwa ein Permanentmagnet in einer supraleitenden Kavität.

<sup>7</sup>Diese sind benannt nach Carl Gottfried Neumann, *nicht* nach John von Neumann (zwar auch ein wichtiger Physiker, aber für andere Dinge zuständig.)

iii) **gemischte Randbedingungen** Auf einem Teil von  $\partial V$  Dirichlet-, auf einem anderen Teil Neumann-Randbedingungen.

Für die *gleichzeitige* Fixierung von  $\varphi$  und  $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}$  auf Punkten oder Teilen von  $\partial V$ , sogenannte **Cauchy-Randbedingungen**, existieren nicht notwendig Lösungen der Poisson-Gleichung.

Die Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung bei vorgegebenen Randbedingungen zeigt man wieder mit Hilfe der 1. Greenschen Formel. Seien dazu zwei Lösungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der Poisson-Gleichung für eine gegebene Ladungsverteilung  $\rho$  mit denselben Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen gegeben. Definieren wir  $u := \varphi_1 - \varphi_2$ , so erfüllt es  $\Delta u = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = 0$  in  $V$ , und  $u = 0$  oder  $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} = 0$  auf  $\partial V$ . Mit der 1. Greenschen Formel also

$$\int_V [u \underbrace{\Delta u}_{=0} + (\text{grad } u)^2] d^3x = \int_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} df. \quad (\text{II.69})$$

Der Integrand im letzten Integral ist auf  $\partial V$  immer Null, da hier entweder  $u$  oder  $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$  verschwinden. Daher also  $(\text{grad } u)^2 = 0$ , und daher  $\text{grad } u = 0$ , so daß  $u = \text{const.}$  auf  $V$ . Für Dirichlet-Randbedingungen war  $u = 0$  auf  $\partial V$ , und damit  $u = 0$  auch auf  $V$ , so daß die Lösungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  identisch sind. Für Neumann-Randbedingungen können sie sich um eine physikalisch nicht relevante Konstante unterscheiden. Die Lösung der Poisson-Gleichung mit vorgegebenen Randbedingungen ist damit eindeutig (ggf. bis auf eine unwichtige Konstante).

Aus diesen Überlegungen zur Eindeutigkeit der Lösung folgt ein strenger Beweis für den Effekt des **Faradayschen Käfigs**: Für eine geschlossene Äquipotentialfläche (z. B. eine geschlossene Leiterfläche) ohne Ladungen im Inneren gilt  $\Delta\varphi = 0$  im Inneren. Analog zu obigen  $u$  folgt dann  $\varphi = \text{const.}$ , und damit  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = 0$  im Inneren.

### II.3.c Lösung des Dirichlet- und Neumann-Problems mit Greenschen Funktionen

Die von uns bei der Lösung der elektrostatischen und magnetostatischen Grundaufgabe benutzte Greensche Funktion (siehe Kapitel II.2.a und II.2.b)

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{II.70})$$

war nur eine spezielle Lösung der Gleichung  $\Delta G = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , denn  $G$  war nur eindeutig bis auf

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad \text{mit} \quad \Delta F = 0. \quad (\text{II.71})$$

Durch die geeignete Wahl von  $F$  kann man die Randbedingungen des elektrostatischen Problems erfüllen. Um das zu sehen, benutzen wir die 2. Greensche Formel (II.8) und setzen darin  $\psi = G$  und  $\phi = \varphi$ :

$$\int_V (\varphi\Delta G - G\Delta\varphi) d^3x' = \int_{\partial V} \left( \varphi \frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}'} - G \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}'} \right) df'. \quad (\text{II.72})$$

Da im ersten Integral  $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  und  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ , erhalten wir

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[ G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{n}'} - \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial\mathbf{n}'} \right] df'. \quad (\text{II.73})$$

Die Freiheit in  $G$  erlaubt es dann, das Oberflächenintegral so zu haben, daß es nur von der vorgegebenen Randbedingung abhängt.

Für **Dirichlet-Randbedingungen** benötigt man hierzu

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{für } \mathbf{x}' \text{ auf } \partial V, \quad (\text{II.74})$$

wodurch der erste Term im Oberflächenintegral verschwindet, und daher

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} df'. \quad (\text{II.75})$$

Beachte, daß im Integral im letzten Term  $\varphi$  nur auf  $\partial V$  benötigt wird, wo es nach Dirichlet-Randbedingungen gerade vorgegeben ist.

Für den Fall von Dirichlet-Randbedingungen kann man zeigen, daß  $G_D$  symmetrisch ist,  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ , indem man das Greensche Theorem mit  $\phi = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\psi = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{y})$  und  $\mathbf{y}$  als Integrationsvariable benutzt.

Für **Neumann-Randbedingungen** kann man die Freiheit in  $G$  so nutzen, daß

$$\frac{\partial G_N}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{für } \mathbf{x}' \text{ auf } \partial V, \quad (\text{II.76})$$

wobei  $S$  der Flächeninhalt von  $\partial V$  ist. (Diesen Ausdruck stattdessen gleich Null zu setzen, würde zu einer Verletzung des Gaußschen Satzes führen.) Dann wird

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \langle \varphi \rangle_{\partial V} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') df', \quad (\text{II.77})$$

wobei  $\langle \varphi \rangle_{\partial V}$  der Mittelwert von  $\varphi$  auf  $\partial V$  ist, der offenbar zu  $\varphi(\mathbf{x})$  nur eine irrelevante Konstante beiträgt.

Im Falle von  $G_N$  ist die Symmetrie  $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_N(\mathbf{x}', \mathbf{x})$  nicht automatisch erfüllt, kann aber ohne Verlust der Allgemeinheit gefordert werden.

Die Greenschen Funktionen sind in vielen Anwendungen nicht analytisch zu bestimmen, so daß eine numerische Lösung erforderlich ist.

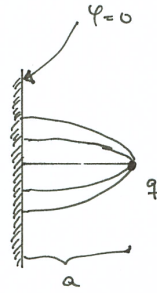
### Physikalische Bedeutung von $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ :

Da  $\Delta F = 0$  in  $V$ , muß die Ladungsverteilung, die dieses Potential  $F$  erzeugt, *außerhalb* von  $V$  liegen, also außerhalb des Gebietes, das wir eigentlich betrachten. Es handelt sich also um eine fiktive Ladungsverteilung, die gerade so gewählt ist, daß die Greensche Funktion  $G_D$  oder  $G_N$  die geforderten Randbedingungen erfüllen kann.

### II.3.d Methode der Spiegelladungen

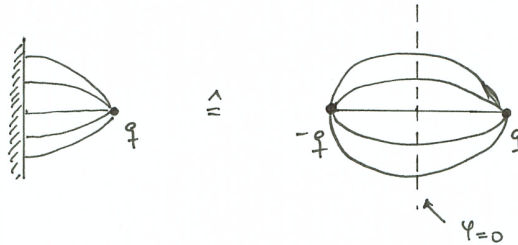
Auf den obigen Überlegungen beruht die Methode der **Spiegelladungen** oder **Bildladungen**.

Betrachten wir als Beispiel eine Punktladung  $q$  im Abstand  $a$  vor einer leitenden, unendlich ausgedehnten und geerdeten (d. h.  $\varphi = 0$ ) Platte. Es handelt sich hierbei also um ein Dirichlet-Problem.



Die Feldlinien treffen senkrecht auf die Platte, wie für Leiteroberflächen notwendig.

Im Gebiet vor der Platte ist das Feld dasselbe wie für zwei Punktladungen  $q$  und  $-q$  im Abstand  $2a$ , aber *ohne* Platte. Die zweite Ladung bezeichnet man als Spiegelladung.



Man erkennt bereits aus Symmetriegründen, daß in der Ebene, in der sich im ursprünglichen Problem die Platte befunden hatte,  $\varphi = 0$  gilt.

Wir wählen die Koordinaten so, daß die Platte in der  $x, z$ -Ebene liegt, und die Ladung sich bei  $(0, a, 0)$  befindet. Mit der Bezeichnung

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{a} \tag{II.78}$$

ist die Greensche Funktion für dieses Problem dann

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{x}'|}. \tag{II.79}$$

Darin ist der erste Term die bekannt, 'normale' Greensche Funktion. Der zweite Term erfüllt vor der Platte die Gleichung  $\Delta F = 0$ , wie gefordert. Die Funktion  $G_D$  aus (II.79) verschwindet tatsächlich für  $\mathbf{x}$  in der gesamten  $y = 0$ -Ebene, denn dort

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + (0 - a)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (0 + a)^2 + z^2} = |\mathbf{x} + \mathbf{x}'|. \tag{II.80}$$

Aus dieser Bedingung kann man in der Tat den zweiten Term aus dem aus Symmetrie-Überlegungen plausiblen Ansatz

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{A}{|\mathbf{x} + \mathbf{x}'|} \tag{II.81}$$

mit einer Konstante  $A$  herleiten, indem man  $A = -1$  aus (II.80) bestimmt.

Das Potential ist dann wegen  $\rho(\mathbf{x}') = q \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{a})$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_V q \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{a}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' \\ &= \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{q}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} \\ &= q \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

Das elektrische Feld senkrecht zur  $x, z$ -Ebene ist dann

$$E_y(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{II.83})$$

woraus man bei  $y = 0$  findet

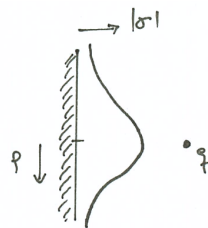
$$E_y(\mathbf{x})|_{y=0} = -\frac{2aq}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{II.84})$$

worin  $\rho^2 = x^2 + z^2$ . Damit haben wir das elektrische Feld für den Fall bestimmt, in dem wir zwei Ladungen aber keine Platte haben. Vor der Platte ist das Feld aber nach unseren allgemeinen Überlegungen dasselbe wie im ursprünglichen Problem mit Platte und *ohne* Spiegelladung.

Kehren wir zum Problem zum Problem mit Platte zurück, so können wir aus dem elektrischen Feld bei  $y = 0$  nun die Flächenladungsdichte der Platte in der  $x, z$ -Ebene bestimmen:

$$\sigma(x, z) = \frac{E_y(\mathbf{x})}{4\pi} = -\frac{aq}{2\pi(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{II.85})$$

Sie ist maximal am Lotpunkt, d. h. bei  $\rho^2 = 0$ .



Die Gesamtladung auf der Platte findet man durch explizite Integration (etwa in Polarkoordinaten mit  $df = \pi d\rho^2$ )

$$\int df \sigma(\rho) = -q, \quad (\text{II.86})$$

wie erwartet. Dies ist die auf der Platte **influenzierte Ladung** oder Influenzladung. Sie kann auf die Platte fließen, da diese geerdet ist. Sie hat daher keine feste Ladung, wie es bei einer isolierten Platte der Fall gewesen wäre.

Die Kraft auf die Ladung  $q$  durch die Influenzladung auf der Platte ist dieselbe wie die durch die Bildladung (aber ohne Platte) hervorgerufene Kraft. Dies ist der Fall, weil vor

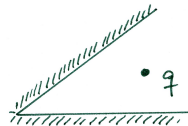
der Platte, wo sich die Ladung  $q$  befindet, das Feld nach Konstruktion dasselbe ist bei einer Bildladung ohne Platte und bei der Platte mit influenzierter Ladung. Die Kraft ist daher

$$\mathbf{K}_q = -\frac{q^2}{4a^2} \mathbf{e}_y. \quad (\text{II.87})$$

Auf die Platte wirkt die entgegengesetzte Kraft

$$\mathbf{K}_{\text{PI}} = \frac{q^2}{4a^2} \mathbf{e}_y. \quad (\text{II.88})$$

Mithilfe von Spiegelladungen kann man eine Reihe ähnlicher Problem relativ elegant lösen, z. B. den Fall einer Ladung vor einer leitenden Kugel (siehe Übungen), oder einer Ladung vor verschiedenen anderen Konfigurationen leitender Platten. In manchen Fällen sind dafür sogar unendlich viele Spiegelladungen erforderlich, etwa bei einer Punktladung vor zwei leitenden Ebenen, die einen spitzen Winkel einschließen.



Das Problem einer Ladung vor einer nicht geerdeten Leiterfläche läßt sich ebenfalls elegant lösen. Dazu sei die Fläche isoliert und mit einer Gesamtladung  $Q$  versehen. Dann löst man zunächst das Problem einer geerdeten Fläche wie im obigen Beispiel mit Spiegelladungen. Daraus kann man die auf der Leiterfläche influenzierte Ladung  $Q_{\text{infl}}$  und das daraus resultierende Feld  $\mathbf{E}_{\text{infl}}$  bestimmen. In dieser Situation sind alle Ladungen im Gleichgewicht, es wirken also auf die Ladungen keine Kräfte. Eine nun zusätzlich auf die Leiterfläche aufgebrachte Ladung  $(Q - Q_{\text{infl}})$  wird sich daher gleichmäßig auf der Fläche verteilen und die Fläche hat wieder die geforderte Gesamtladung. Wir addieren dann das alleine von dieser gleichmäßig verteilten Ladung  $(Q - Q_{\text{infl}})$  erzeugte Feld nach dem Superpositionsprinzip zum Feld  $\mathbf{E}_{\text{infl}}$  und erhalten so die Lösung des gesamten Problems.

## Kapitel III

# Multipolentwicklung elektrostatischer Felder, vollständige Funktionensysteme

Häufig spielen in der makroskopischen Elektrostatik die mikroskopischen Details einer Ladungsverteilung keine große Rolle. Bei großem Abstand von der Ladungsverteilung kann man diese oft schon hinreichend gut charakterisieren durch wenige Größen, die sogenannten **Multipolmomente**.

Die Behandlung der Multipolmomente bietet auch Gelegenheit, einige mathematische Methoden zu erlernen, darunter Tensoren, die Fourier-Transformation und orthogonale Funktionensysteme.

### III.1 Transformationseigenschaften von Feldern, Tensoren

Man kann physikalische Größen nach ihrem Verhalten unter Drehungen und Spiegelungen charakterisieren. Wir betrachten daher lineare **orthogonale Transformationen** im  $\mathbb{R}^3$ , d. h. normerhaltende Transformationen. Diese bilden die **orthogonale Gruppe**. Im  $\mathbb{R}^3$  können diese Transformationen durch reelle  $3 \times 3$  Matrizen dargestellt werden:

$$O(3) = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}^3) \mid A^T A = \mathbf{1}\} \quad (\text{III.1})$$

Dabei bezeichnet  $A^T$  das transponierte der Matrix  $A$ , und  $\mathbf{1}$  die Einheitsmatrix. Die Bedingung  $A^T A = \mathbf{1}$  ist äquivalent zu  $A^T = A^{-1}$ . Die Gruppe  $O(3)$  beinhaltet Drehungen und Spiegelungen. Die Matrizen wirken als

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (\text{III.2})$$

und mit  $(A)_{ik} = a_{ik}$  (der erste Index bezeichnet die Zeile, der zweite die Spalte) also

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k =: a_{ik} x_k. \quad (\text{III.3})$$

Dabei haben wir die **Summenkonvention** benutzt, nach der in Produkten über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Es ist offenbar

$$(A^T)_{ik} = a_{ki}. \quad (\text{III.4})$$



Damit wird  $A^T A = \mathbf{1}$  zu

$$a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{III.5})$$

und daher  $A^T \mathbf{x}' = A^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}$  zu

$$a_{ik}x'_i = a_{ik}a_{ij}x_j = \delta_{kj}x_j = x_k. \quad (\text{III.6})$$

Wegen

$$1 = \det \mathbf{1} = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = (\det A)^2 \quad (\text{III.7})$$

finden wir für alle  $A \in O(3)$

$$\det A = \pm 1. \quad (\text{III.8})$$

Ein **Tensorfeld n-ter Stufe** ordnet jedem  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$   $3^n$  Größen  $T_{j_1 \dots j_n}$  zu und verhält sich unter orthogonalen Transformationen gemäß

$$T'_{k_1 \dots k_n}(\mathbf{x}') = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{k_1 j_1} \dots a_{k_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.9})$$

Alle physikalisch meßbaren Größen sind Tensoren! Häufig auftretende Typen von Tensorfeldern und ihre definierenden Transformationseigenschaften sind:

i) **Skalarfeld** oder Tensorfeld 0. Stufe

$$\lambda'(\mathbf{x}') = \lambda(\mathbf{x}) \quad (\text{III.10})$$

ii) **(polares) Vektorfeld** oder Tensorfeld 1. Stufe

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}') = A\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.11})$$

iii) **axiales Vektorfeld** oder Pseudovektorfeld

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}') = (\det A)A\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.12})$$

Offenbar entspricht dies aufgrund des Faktors  $(\det A)$  nicht dem allgemeinen Transformationsverhalten (III.9) für ein Tensorfeld 1. Stufe. Axiale Vektorfelder lassen sich aber als antisymmetrische Tensoren 2. Stufe darstellen: Ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe hat nur 3 unabhängige Komponenten, die sich mit den drei Komponenten eines Pseudovektorfelds identifizieren lassen.

Als *reine Drehungen* bezeichnet man orthogonale Transformationen, die zusätzlich  $\det A = +1$  erfüllen. Sie werden beschrieben durch die Gruppe  $SO(3)$ . *Drehspiegelungen* sind dagegen orthogonale Transformationen, für die  $\det A = -1$ .

Unter reinen Drehungen verhalten sich polare Vektoren und axiale Vektoren gleich, unter Drehspiegelungen (oder reinen Spiegelungen) aber verschieden.

Der Nabla-Operator ist ein polarer Vektor, denn

$$\nabla'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_k} = a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} = a_{ik} \nabla_k. \quad (\text{III.13})$$

Es gilt (s. Übungen):

$$\begin{aligned} \text{grad } \lambda(\mathbf{x}) & \text{ ist polares Vektorfeld} \\ \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) & \text{ ist Skalarfeld} \\ \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) & \text{ ist axiales Vektorfeld} \end{aligned}$$

Als **invarianten Tensor** bezeichnet man einen solchen, den eine jede orthogonale Transformation unverändert läßt. Z. B. ist das Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  ein invarianter Tensor, denn

$$\delta'_{ik} = a_{ij}a_{kl}\delta_{jl} = a_{il}a_{kl} = \delta_{ik} . \quad (\text{III.14})$$

Auch ein Skalarprodukt (allgemeiner: eine Kontraktion) ist invariant, denn

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_i w_i = \delta_{ij} v_i w_j \quad (\text{III.15})$$

und dasselbe (nur mit anders benannten Summationsindizes) erhält man für

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = v'_i w'_i = \delta_{ij} v'_i w'_j = \delta_{ij} a_{ik} v_k a_{jl} w_l = a_{ik} a_{il} v_k w_l = \delta_{kl} v_k w_l . \quad (\text{III.16})$$

Allgemeiner kann man zeigen, daß in Kontraktionen nur die offenen Indizes nicht-trivial transformiert werden. Mit zwei Tensoren  $T_{ijk}$  und  $S_{jk}$  ist nämlich zum Beispiel

$$\begin{aligned} T'_{ijk} S'_{jk} &= \delta_{jm} \delta_{kn} T'_{ijk} S'_{mn} \\ &= \delta_{jm} \delta_{kn} a_{ir} a_{js} a_{kt} T_{rst} a_{mx} a_{ny} S_{xy} \\ &= \delta_{jm} a_{js} a_{mx} \delta_{kn} a_{kt} a_{ny} a_{ir} T_{rst} S_{xy} \\ &= a_{ms} a_{mx} a_{nt} a_{ny} a_{ir} T_{rst} S_{xy} \\ &= \delta_{sx} \delta_{ty} a_{ir} T_{rst} S_{xy} \\ &= a_{ir} T_{rst} S_{st} , \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

wobei im vorletzten Schritt (III.5) benutzt wurde.

Es ist weiter

$$\epsilon'_{ijk} = a_{im} a_{jn} a_{kl} \epsilon_{mnl} = (\det A) \epsilon_{ijk} , \quad (\text{III.18})$$

aufgrund der Definition der Determinante. Die Proportionalität zu  $\epsilon_{ijk}$  ergibt sich bereits aus der totalen Antisymmetrie in den Indizes.

Wichtig ist außerdem die Zerlegung eines Tensors in **irreduzible** Tensoren. Wir erklären dies am Beispiel eines Tensors 2. Stufe,  $T_{ik}$ . Wir zerlegen

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) =: S_{ik} + A_{ik} , \quad (\text{III.19})$$

wobei  $S_{ik}$  der *symmetrische* Anteil ist,

$$S_{ik} = S_{ki} \quad (\text{III.20})$$

und  $A_{ik}$  der *antisymmetrische* Anteil ist,

$$A_{ik} = -A_{ki} . \quad (\text{III.21})$$

Diese Zerlegung ist invariant unter orthogonalen Transformationen:

$$S'_{ik} = S'_{ki}, \quad A'_{ik} = -A'_{ki}. \quad (\text{III.22})$$

Außerdem ist die **Spur**

$$\text{tr } T = \text{Sp } T = \sum_{i=1}^3 T_{ii} \quad (\text{III.23})$$

eine Invariante, nämlich ein Spezialfall einer Kontraktion. Wir können daher schreiben

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \left[ \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) - \frac{1}{3}\delta_{ik} \text{tr } T \right] + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) + \frac{1}{3}\delta_{ik} \text{tr } T \\ &=: B_{ik} + A_{ik} + \frac{1}{3}\delta_{ik} \text{tr } T. \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Diese Zerlegung ist invariant unter orthogonalen Transformationen. Der Anteil  $B_{ik}$  ist symmetrisch und spurfrei,

$$B_{ik} = B_{ki}, \quad \text{tr } B = 0. \quad (\text{III.25})$$

Obige Zerlegung ist ein Beispiel für die **Ausreduktion** eines Tensors, d. h. die Zerlegung in separat invariante Anteile. Wenn keine weitere Ausreduktion in invariante Teile mehr möglich ist, spricht man von **irreduziblen** Tensoren.

## III.2 Multipolmomente einer statischen Ladungsverteilung

Für eine lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  (mit Dirichlet-Randbedingungen im Unendlichen) haben wir

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (\text{III.26})$$

Wir wollen annehmen, daß diese Ladungsverteilung in einer endlichen Kugel um den Ursprung lokalisiert ist. Um ihre Wirkung bei großen Abständen zu untersuchen, ist eine Taylorentwicklung nützlich.

Allgemein gilt für die Taylorentwicklung einer Funktion  $f(\mathbf{x})$  in 3 Dimensionen

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) &= f(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3) \\ &= f(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_1, x_2, x_3) + \dots \\ &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{x}) \\ &= \exp(\mathbf{a} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Wir wollen nun  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  in (III.26) für  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$  entwickeln, wobei wir  $r = |\mathbf{x}|$  schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{r} - (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} 3x'_k x'_l + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Da aber

$$\frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \mathbf{x}'^2 \delta_{kl} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^3 \frac{3x_k^2 - r^2 \delta_{kk}}{r^5} \mathbf{x}'^2 = \frac{1}{6} \frac{\mathbf{x}'^2}{r^5} (3r^2 - 3r^2) = 0, \quad (\text{III.29})$$

können wir den letzten Term in (III.28) auch schreiben als

$$\frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} (3x'_k x'_l - \mathbf{x}'^2 \delta_{kl}). \quad (\text{III.30})$$

Dann erhalten wir für die Taylorentwicklung von (III.26)

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x' \\ &\quad + \frac{1}{r^3} \mathbf{x} \cdot \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x' \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \int \rho(\mathbf{x}') (3x'_k x'_l - \mathbf{x}'^2 \delta_{kl}) d^3 x' \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Wir definieren die folgenden **Multipolmomente**:  
die Gesamtladung (das Monopolmoment)

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x', \quad (\text{III.32})$$

das **Dipolmoment**

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x', \quad (\text{III.33})$$

und den **Tensor des Quadrupolmoments**

$$q_{kl} = \int \rho(\mathbf{x}') (3x'_k x'_l - \mathbf{x}'^2 \delta_{kl}) d^3 x'. \quad (\text{III.34})$$

Dann wird die Multipolentwicklung für das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 q_{kl} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} + \dots \quad (\text{III.35})$$

und wir bezeichnen die Terme darin mit  $\varphi_{(n)}$ ,

$$\varphi(\mathbf{x}) =: \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{(n)}(\mathbf{x}). \quad (\text{III.36})$$

Hieraus gewinnt man durch  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  die Multipolentwicklung für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{(n)}(\mathbf{x}), \quad (\text{III.37})$$

worin die ersten beiden (Monopol- und Dipol-)Terme sind:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = Q \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - r^2\mathbf{p}}{r^5} + \dots \quad (\text{III.38})$$

Aufgrund der Taylorentwicklung erkennt man leicht, daß in diesen Entwicklungen die Terme der Multipolordnung  $n$  für  $r \rightarrow \infty$  abfallen wie

$$\begin{aligned} \varphi_{(n)}(\mathbf{x}) &\sim \frac{1}{r^{n+1}} \\ \mathbf{E}_{(n)}(\mathbf{x}) &\sim \frac{1}{r^{n+2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Damit finden wir insbesondere, daß die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  jeder lokalisierten Ladungsverteilung  $\rho$  für große  $r$  mindestens wie  $1/r^2$  abfällt. Dies war eine wichtige Voraussetzung für die Anwendung des Fundamentalsatzes der Vektoranalysis, siehe Kapitel I.5 und II.1. Erst hier haben wir uns jetzt überzeugt, daß die dort für  $\mathbf{E}$  gemachte Annahme tatsächlich zutrifft.

- $\mathbf{p}$  ist ein Vektor, entsprechend drei unabhängigen Größen. Zwei dieser Parameter können jedoch durch eine Drehung des Koordinatensystems verändert werden (z. B. indem man die  $z$ -Achse entlang  $\mathbf{p}$  legt). Bei zwei der Parameter handelt es sich daher um **äußere** Eigenschaften, also solche, die von der Lage im Raum abhängen.
- Bei einer *Verschiebung* des Koordinatensystems um  $\mathbf{d}$ ,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{d}, \quad \rho'(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x}) \quad (\text{III.40})$$

gilt:

$$\mathbf{p}' = \int \rho'(\mathbf{x}')\mathbf{x}' d^3x = \int \rho(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{d}) d^3x = \mathbf{p} - Q\mathbf{d}, \quad (\text{III.41})$$

worin  $Q$  die Gesamtladung ist. Ist  $Q \neq 0$ , so verschwindet das Dipolmoment bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems! Für  $Q = 0$  ist dagegen  $|\mathbf{p}| = p$  eine unter Translationen und Drehungen invariante Größe, die die Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  charakterisiert, und damit eine **innere** Eigenschaft. Allgemein gilt:

Der Wert (Betrag) des niedrigsten nichtverschwindenden Multipolmoments einer Ladungsverteilung ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

- Es gilt  $\mathbf{p} = 0$  für jede spiegelsymmetrische Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x}) = \rho(-\mathbf{x})$ , insbesondere also für jede rotationssymmetrische Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x}) = \rho(|\mathbf{x}|)$ , denn

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{x} d^3x = \int \rho(-\mathbf{x})(-\mathbf{x}) d^3x = - \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{x} d^3x = -\mathbf{p}. \quad (\text{III.42})$$

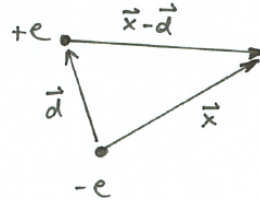
- Das einfachste Beispiel für einen elektrischen Monopol ist eine Punktladung  $q$  im Ursprung mit dem Potential

$$\varphi_{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{q}{r} \quad (\text{III.43})$$

und dem Feld

$$\mathbf{E}_{(0)}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{x}}{r^3}. \quad (\text{III.44})$$

- Das einfachste Beispiel für einen elektrischen Dipol ist die folgende Ladungsverteilung



mit

$$\rho(\mathbf{x}') = e[-\delta^{(3)}(\mathbf{x}') + \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{d})]. \quad (\text{III.45})$$

Das Potential ist offenbar

$$\varphi(\mathbf{x}) = e \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{r} \right). \quad (\text{III.46})$$

Mit dem elektrischen Dipolmoment  $\mathbf{p} = e\mathbf{d}$  findet man durch Taylor-Entwicklung für kleine  $\mathbf{d}$  (siehe Übungen) für das Potential und das elektrische Feld in der ersten Ordnung (also für den Dipolterm) tatsächlich

$$\varphi_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \quad (\text{III.47})$$

und für die zugehörige Feldstärke

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \quad (\text{III.48})$$

Obige Konfiguration hat auch ein Quadrupolmoment. Ein **Punktdipol** ist definiert als der Grenzwert  $\mathbf{d} \rightarrow 0$  dieser Konfiguration bei festgehaltenem  $|\mathbf{p}|$  (d. h. gleichzeitig  $e \rightarrow e/|\mathbf{d}|$ ).

- Wählt man hierbei  $\mathbf{p}$  als in  $z$ -Richtung liegend,  $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$  so ist

$$\varphi_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{pz}{r^3} = \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{pP_1(\cos \theta)}{r^2} \quad (\text{III.49})$$

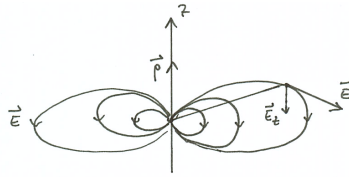
mit dem Legendre-Polynom  $P_1(x) = x$ , und

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) = p \frac{3z\mathbf{x} - r^2\mathbf{e}_z}{r^5}. \quad (\text{III.50})$$

In sphärischen Polarkoordinaten sind die kartesischen Komponenten also

$$\begin{aligned} E_{(1)x} &= \frac{3p}{r^3} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \\ E_{(1)y} &= \frac{3p}{r^3} \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\ E_{(1)z} &= \frac{p}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Für den Fall eines Punktdipols mit Orientierung in  $z$ -Richtung bei  $\mathbf{x} = 0$  (oder bei einem ausgedehnten Dipol mit  $|\mathbf{d}| > 0$  für große Abstände  $r \gg |\mathbf{d}|$ ) findet man daher die folgende Form der Feldlinien:



- Ein wichtiges Beispiel für ein Molekül, das ein elektrisches Dipolmoment aufweist, ist das Wassermolekül  $\text{H}_2\text{O}$ . Bei 300 K ist es im Gaszustand gegeben durch

$$p_{\text{H}_2\text{O}} = 1.85 \cdot 10^{-18} \text{ st.Cb cm.} \quad (\text{III.52})$$

Beachte, daß im Gaußschen Maßsystem  $|e| = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ st.Cb}$ , und ein **statisches Coulomb** (st.Cb oder statCb) ist gegeben durch

$$1 \text{ st.Cb} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{III.53})$$

so daß ein Coulomb in SI Einheiten  $3 \cdot 10^9 \text{ st.Cb}$  entspricht.

- Der Tensor des Quadrupolmoments  $q_{kl}$  ist symmetrisch und spurfrei, und daher ein irreduzibler Tensor. Der zusätzliche (verschwindende) Term in (III.29) bzw. (III.30) war addiert worden, um die Spurfreiheit zu erreichen.
- Der Tensor des Quadrupolmoments hat als symmetrischer, spurfreier Tensor 5 unabhängige Komponenten. Da  $q_{kl}$  symmetrisch ist, kann er durch eine (orthogonale) Hauptachsentransformation diagonalisiert werden und hat in den entsprechenden Koordinaten die Diagonalform

$$(q_{kl}) = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{III.54})$$

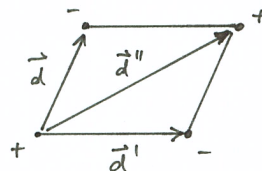
Da die Spur unter orthogonalen Transformationen erhalten ist, gilt auch in der diagonalen Form

$$\text{tr}(q_{kl}) = \sum_i q_{ii} = 0. \quad (\text{III.55})$$

Damit sind es nur noch 2 Parameter, die das Quadrupolmoment charakterisieren.

Es gibt daher 2 *innere* Parameter des Tensors des Quadrupolmoments, während 3 weitere Parameter durch die Wahl des Koordinatensystems bestimmt sind.

- Eine einfache Ladungsverteilung, die als führenden Multipol ein Quadrupolmoment besitzt (die also kein Monopol- und kein Dipolmoment aufweist), ist die folgende:



worin  $\mathbf{d}'' = \mathbf{d} + \mathbf{d}'$ . Das Potential ist offenbar

$$\varphi(\mathbf{x}) = e \left( -\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}'|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}''|} + \frac{1}{r} \right). \quad (\text{III.56})$$

Hieraus erhält man (siehe Übungen), daß  $\varphi_{(0)}(\mathbf{x}) = \varphi_{(1)}(\mathbf{x}) = 0$  und

$$q_{kl} = e [3(d_k d'_l + d'_k d_l) - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' \delta_{kl}]. \quad (\text{III.57})$$

In diesem einfachen Beispiel einer Quadrupolanordnung können als die beiden unabhängigen inneren Parameter zum Beispiel  $d d'$  und  $\angle(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$  gewählt werden.

• Allgemein ist für eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung  $\rho$  das Quadrupolmoment Null. Denn für  $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r)$  ist  $q_{kl} = c \delta_{kl}$ , da keine Richtung ausgezeichnet ist. Da aber wegen der Spurfreiheit weiter  $\sum_i q_{ii} = 3c = 0$ , ist  $c = 0$  und damit  $(q_{kl}) = 0$ .

• Für jede um die 3-Achse rotationssymmetrische Ladungsverteilung  $\rho$  ist aus Symmetriegründen

$$q_{11} = q_{22} \quad (\text{III.58})$$

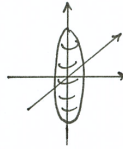
und dann wegen der Spurfreiheit

$$q_{33} = -2q_{11} = -2q_{22}. \quad (\text{III.59})$$

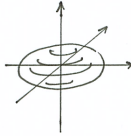
In einer um die 3-Achse symmetrischen Konfiguration spricht man daher auch von  $q_{33}$  als **dem** Quadrupolmoment der Ladungsverteilung. Bei einer homogenen Ladungsverteilung mißt  $q_{33}$  dann die Abweichung von der Kugelgestalt, denn

$$q_{33} = \int \rho(\mathbf{x})(3x_3^2 - r^2) d^3x = \int \rho(\mathbf{x})r^2(3\cos^2\theta - 1) d^3x. \quad (\text{III.60})$$

Falls  $q_{33} > 0$ , so liegt eine eher zigarrenförmig entlang der 3-Achse orientierte Ladungsverteilung vor,



Für  $q_{33} < 0$ , ist die Ladungsverteilung dagegen eher diskusförmig entlang der 1-2-Ebene orientiert,



Viele Atomkerne haben solche Formen. Die Größenordnung des Quadrupolmoments wird hier durch Ladung und Größe des Atomkerns bestimmt. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} q_{33}(\text{Deuteron}) &= 2.7 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \\ \frac{1}{e} q_{33}({}^{203}\text{Bi}) &= -4 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Die potentielle Energie einer Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  in einem *äußeren* elektrischen Potential  $\varphi^{\text{ext}}$ , das wir als schwach veränderlich annehmen wollen, ist

$$W = \int_V \rho(\mathbf{x}) \varphi^{\text{ext}}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{III.61})$$



Wir können  $\varphi^{\text{ext}}$  um einen geeignet gewählten Ursprung entwickeln,

$$\begin{aligned}\varphi^{\text{ext}} &= \varphi^{\text{ext}}(0) + (\mathbf{x} \cdot \nabla)\varphi^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi^{\text{ext}}(0) + \dots \\ &= \varphi^{\text{ext}}(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) + \dots\end{aligned}\quad (\text{III.62})$$

Da für ein äußeres elektrisches Feld  $\text{div } \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) = 0$ , haben wir

$$0 = \frac{1}{6} r^2 \text{div } \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) = \frac{1}{6} \sum_j r^2 \frac{\partial}{\partial x_j} E_j^{\text{ext}}(0) = \frac{1}{6} \sum_{i,j} r^2 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0). \quad (\text{III.63})$$

Daher können wir den letzten Term in (III.62) so ergänzen, daß darin die Quadrupolmomente  $q_{ij}$  auftreten:

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) = -\frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) \quad (\text{III.64})$$

Mit der Entwicklung für das äußere Potential wird die potentielle Energie dann

$$W = Q\varphi^{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} q_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) + \dots \quad (\text{III.65})$$

Wir beobachten darin die Kopplung der verschiedenen Multipole der Ladungsverteilung  $\rho$  an das äußere Feld: Die Ladung koppelt an das Potential, der Dipol an das elektrische Feld, der Quadrupol an den Gradienten des Feldes, usw.

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung im äußeren Feld ist (für den Dipol ist  $Q = 0$ )

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{x}') d^3 x' \\ &= (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \dots\end{aligned}\quad (\text{III.66})$$

Das Drehmoment auf den Dipol im Ursprung ist

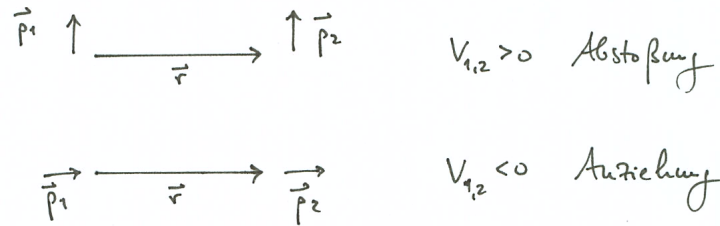
$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \times \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{x}') d^3 x' \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \dots\end{aligned}\quad (\text{III.67})$$

In einem *homogenen* elektrischen Feld wirkt daher auf einen Dipol keine Kraft, aber ein Drehmoment.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Wechselwirkungsenergie  $V_{1,2}$  eines Dipols im Feld eines anderen Dipols, separiert durch den Abstand  $\mathbf{x}$ ,

$$\begin{aligned}V_{1,2} &= -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \\ &= \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x})}{r^5}.\end{aligned}\quad (\text{III.68})$$

Sie hängt ab von der Orientierung der Dipole zueinander, sowie von der Orientierung jedes Dipols zur Verbindungslinie.



### III.3 Vollständige, orthogonale Funktionensysteme

Es ist instruktiv und oft nützlich, die Multipolmomente in sphärischen Polarkoordinaten zu untersuchen. Dabei begegnen wir unter anderem den Legendre-Polynomen und den Kugelflächenfunktionen, die Beispiele für orthogonale Funktionensysteme sind. Letztere treten ebenfalls in vielen Gebieten der Physik auf. Ziel ist nun im folgenden zunächst, das Konzept des linearen Vektorraums mit einem Skalarprodukt auf Funktionenräume zu übertragen.

Wir betrachten abzählbar unendlich viele komplexwertige Funktionen auf einem Intervall,  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Auf der Menge dieser Funktionen  $\{\varphi_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$  definieren wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_n^*(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi. \quad (\text{III.69})$$

Das System heißt orthogonal, falls

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = A_n \delta_{nm} \quad (\text{III.70})$$

und orthonormal, falls alle  $A_n = 1$ . Dann bilden die  $\{\varphi_n\}$  eine Orthonormalbasis für einen unendlich-dimensionalen Vektorraum mit den Linearkombinationen

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^N f_n \varphi_n(\xi) \quad (\text{III.71})$$

mit beliebigem  $N \in \mathbb{N}$ . Man findet (analog dem Produkt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$  im endlich-dimensionalen Fall)

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(\xi) g(\xi) d\xi = \sum_{n,m} f_n^* g_m \int_a^b \varphi_n^*(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi = \sum_{n,m} f_n^* g_m \delta_{nm} = \sum_n f_n^* g_n. \quad (\text{III.72})$$

Offenbar ist

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*. \quad (\text{III.73})$$

Man definiert die Norm von  $f$  als

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left[ \int_a^b f^*(\xi) f(\xi) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_n f_n^* f_n \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_n |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0. \quad (\text{III.74})$$

$\|f\| = 0$  tritt nur ein, wenn  $f(\xi) = 0$  für alle  $\xi$ .

Es gilt die **Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2. \quad (\text{III.75})$$

Man kann jedes linear unabhängige System von  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens orthonormalisieren.

Entwickelt man eine beliebige Funktion  $F(\xi)$  in eine Orthonormalbasis,

$$F(\xi) = \sum_n F_n \varphi_n(\xi), \quad (\text{III.76})$$

so erhält man die Koeffizienten  $F_n$  durch

$$F_n = \int_a^b \varphi_n^*(\xi) F(\xi) d\xi = \langle \varphi_n, F \rangle. \quad (\text{III.77})$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \Delta_N &:= \left\| F - \sum_{n=0}^N F_n \varphi_n \right\|^2 \\ &= \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N F_n^* \langle \varphi_n, F \rangle - \sum_{n=0}^N F_n \langle F, \varphi_n \rangle + \sum_{n,m=0}^N F_n^* F_m \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \\ &= \|F\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N F_n^* F_n + \sum_{n=0}^N F_n^* F_n \\ &= \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N |F_n|^2. \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

$\Delta_N$  mißt, wie gut  $\sum_{n=0}^N F_n \varphi_n(\xi)$  die Funktion  $F(\xi)$  approximiert. Falls  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$  für jede stetige Funktion  $F(\xi)$ , so heißt  $\{\varphi_n\}$  ein **vollständiges** Orthonormalsystem.

Wegen

$$\Delta_N = \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N |F_n|^2 = \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N |\langle \varphi_n, F \rangle|^2 \quad (\text{III.79})$$

kann man die Bedingung  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$ , die Vollständigkeitsrelation, schreiben als

$$\langle F, F \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \varphi_n, F \rangle|^2, \quad (\text{III.80})$$

oder äquivalent als

$$\begin{aligned} \int_a^b F^*(\xi) F(\xi) d\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^*(\xi) F(\xi) d\xi \int_a^b \varphi_n(\xi') F^*(\xi') d\xi' \\ &= \int_a^b d\xi' \int_a^b d\xi F(\xi) F^*(\xi') \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(\xi) \varphi_n(\xi'). \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

Wir haben daher die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(\xi) \varphi_n(\xi') = \delta(\xi - \xi'). \quad (\text{III.82})$$

### III.4 Fourier-Entwicklung, Fourier-Transformation

Ein sehr wichtiges Beispiel für ein Orthonormalsystem von Funktionen ist das System aus trigonometrischen Funktionen

$$e^{i\alpha\xi} = \cos \alpha\xi + i \sin \alpha\xi. \quad (\text{III.83})$$

Dieses bringt uns zur **Fourier-Entwicklung** für Funktionen.

Die Funktionen ( $a \in \mathbb{R}_+$ )

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{in\pi\xi/a}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.84})$$

bilden ein Orthonormalsystem auf  $[-a, a]$ . Man kann daher für eine Funktion  $f$  die Fourierentwicklung

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi\xi/a} \quad (\text{III.85})$$

schreiben mit den Fourierkoeffizienten

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a e^{-in\pi\xi/a} f(\xi) d\xi. \quad (\text{III.86})$$

Für den speziellen Fall  $f(\xi) = \delta(\xi - \xi')$  (für  $\xi \in [-a, a]$ ) ist

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-in\pi\xi'/a}, \quad (\text{III.87})$$

so daß

$$\delta(\xi - \xi') = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi(\xi - \xi')/a}. \quad (\text{III.88})$$

Die Funktionen  $\varphi_n$  sind  $2a$ -periodisch,

$$\varphi_n(\xi + 2a) = \varphi_n(\xi). \quad (\text{III.89})$$

Daher lassen sich alle Funktionen der Periode  $2a$  so entwickeln. Allerdings ist die Konvergenz nur an den Stetigkeitsstellen von  $f$  auch gleichmäßig, nicht an den Sprungstellen.

Wir wollen das Konzept der Fourierentwicklung auch auf nicht-periodische Funktionen verallgemeinern und diese ebenfalls entwickeln. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} k_n &:= \frac{n\pi}{a} \\ \Delta k &:= \frac{\pi}{a} \\ \tilde{f}(k_n) &:= \sqrt{\frac{a}{\pi}} f_n. \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Damit wird die Entwicklung

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} f_n e^{in\pi\xi/a} \frac{\pi}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_n) e^{ik_n\xi} \Delta k. \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

Für  $a \rightarrow \infty$  wird aus der Summation über  $k_n$  eine Integration über  $k$ :

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ik\xi} dk \quad (\text{III.92})$$

$\tilde{f}(k)$  heißt **Fouriertransformierte** von  $f(\xi)$ . Wir können  $\tilde{f}(k)$  durch die Verallgemeinerung von (III.86) bestimmen, nämlich

$$\tilde{f}(k_n) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ik_n\xi} f(\xi) d\xi. \quad (\text{III.93})$$

Für  $a \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} f(\xi) d\xi \quad (\text{III.94})$$

Ein präziser Beweis dieser Formeln im Grenzwert  $a \rightarrow \infty$  ist möglich.

Aus obigen Transformationen erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{ik(\xi-\xi')} f(\xi') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f(\xi') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(\xi-\xi')}. \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

Daraus lesen wir ab, daß

$$\delta(\xi - \xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(\xi-\xi')}, \quad (\text{III.96})$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} dk = 2\pi\delta(\xi) \quad (\text{III.97})$$

Diese Formeln lassen sich leicht auf drei Dimensionen verallgemeinern:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (\text{III.98})$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (\text{III.99})$$

und

$$\boxed{\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{x})} \quad (\text{III.100})$$

Eine wichtige Anwendung ist unter anderem die Darstellung der Greenschen Funktion als Fouriertransformierte,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k^2}. \quad (\text{III.101})$$

### III.5 Legendre-Polynome

Ein weiteres wichtiges Beispiel für ein vollständiges orthogonales Funktionensystem sind die Legendre-Polynome. Wir entwickeln wieder die Greensche Funktion  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  in eine Potenzreihe, wobei wir  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $r' = |\mathbf{x}'|$  und  $\theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  benutzen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^l \quad \text{für } r' < r. \end{aligned} \quad (\text{III.102})$$

Die hierdurch definierten  $P_l(x)$  sind die **Legendre-Polynome**. Diese Polynome,  $\{P_l(x)\}_{l \in \mathbb{N}}$ , bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem auf dem Intervall  $[-1, 1]$ .

In obiger Formel ist die Bedingung  $r' < r$  wichtig für die Konvergenz der Reihe. Für den Fall  $r < r'$  vertauscht man  $r$  und  $r'$ . Man schreibt allgemein auch

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{III.103})$$

wobei  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) das kleinere (größere) von  $r$  und  $r'$  ist.

Dies kann man auch mit Hilfe der  $\theta$ -Funktion darstellen:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \theta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) + \theta(r' - r) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (\text{III.104})$$

Für  $\mathbf{x}' = r' \mathbf{e}_z$  können wir auch folgende Taylorentwicklung schreiben:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} r'^l (\mathbf{e}_z \cdot \nabla)^l \frac{1}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} r'^l \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \frac{1}{r}. \quad (\text{III.105})$$

Durch Vergleich mit (III.102) erkennt man

$$P_l(\cos \theta) = r'^{l+1} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \frac{1}{r}. \quad (\text{III.106})$$

Man kann zeigen, daß dies äquivalent ist zur **Rodrigues-Formel**

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l} \quad (\text{III.107})$$

Damit findet man

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{III.108}$$

Insbesondere ist  $P_l$  ein Polynom vom Grad  $l$ . Es gilt

$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l. \tag{III.109}$$

$P_l$  ist eine gerade (ungerade) Funktion für  $l$  gerade (ungerade).  $P_l$  hat  $l$  Nullstellen in  $[-1, 1]$ .

Die  $P_l$  erfüllen eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die **Legendresche Differentialgleichung**

$$(1 - x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l + 1)P_l = 0 \tag{III.110}$$

die man auch schreiben kann als

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] + l(l + 1)P_l = 0. \tag{III.111}$$

Damit kann man (durch Reihenentwicklung, deren Konvergenz das Abbrechen der Reihe erfordert,) zeigen, daß die Endlichkeit und Stetigkeit auf  $[-1, 1]$  (mit den Endpunkten!) erfordert:

$$l \in \mathbb{N}. \tag{III.112}$$

Es gilt die Rekursionsformel

$$(l + 1)P_{l+1} - (2l + 1)xP_l + lP_{l-1} = 0, \tag{III.113}$$

wofür  $P_{-1} = 0$  definiert wird. Weiter gilt die **Orthogonalitätsrelation**

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l + 1} \delta_{ll'} \tag{III.114}$$

Die  $P_l$  bilden ein vollständiges System auf  $[-1, 1]$ , d. h. jedes  $f(x)$  auf  $[-1, 1]$  kann man darstellen als

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \tag{III.115}$$

mit

$$a_l = \frac{2l + 1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x)f(x) dx. \tag{III.116}$$

Die Vollständigkeitsrelation ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l + 1}{2} P_l(x)P_l(x') = \delta(x - x') \tag{III.117}$$

### III.6 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, Kugelflächenfunktionen

Es ist in vielen Fällen nützlich, die Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung in sphärischen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) durchzuführen. Dabei wollen wir die Poisson-Gleichung lösen, um das elektrostatische Potential  $\varphi(\mathbf{x})$  zu bestimmen. Wie wir gesehen hatten, sind für dieses Problem auch die homogenen Lösungen, d. h. die Lösungen der Laplace-Gleichung wichtig. Diese wollen wir jetzt in Kugelkoordinaten studieren. Die folgenden Überlegungen sind auch in der Quantenmechanik von großer Bedeutung.

In sphärischen Polarkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  wird die Laplace-Gleichung  $\Delta\phi = 0$  zu

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega\right) \phi = 0, \quad (\text{III.118})$$

worin

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (\text{III.119})$$

Mit dem Separationsansatz

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{u(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \quad (\text{III.120})$$

wird daraus nach Multiplikation mit  $r^3 \sin^2 \theta / (uPQ)$

$$r^2 \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] = -\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}. \quad (\text{III.121})$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nicht von  $\varphi$  abhängt, muß auch die rechte Seite von  $\varphi$  unabhängig und damit eine Konstante sein, die wir mit  $m^2$  bezeichnen wollen,

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2. \quad (\text{III.122})$$

Dies wird gelöst durch

$$Q = e^{\pm im\varphi}. \quad (\text{III.123})$$

Damit die Lösung eindeutig ist, d. h. zur Sicherstellung der  $2\pi$ -Periodizität in  $\varphi$ , muß

$$m \in \mathbb{Z}. \quad (\text{III.124})$$

In ähnlicher Weise können die von  $r$  und die von  $\theta$  abhängigen Terme auf der linken Seite von (III.121) separiert werden, indem man eine neue Konstante  $l(l+1)$  einführt. Man erhält

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 \quad (\text{III.125})$$

und

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0. \quad (\text{III.126})$$

Die Lösung der letzten Gleichung ist (mit zwei Konstanten  $A$  und  $B$ )

$$u(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}, \quad (\text{III.127})$$



während aus (III.125) mit  $x = \cos \theta$  die **verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung** wird:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (\text{III.128})$$

Ihre Lösungen sind die **zugeordneten Legendre-Funktionen**  $P_l^m(x)$ . Man kann zeigen: für die Endlichkeit auf ganz  $[-1, 1]$  muß  $l \in \mathbb{N}$  und  $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$ .

Beachte, daß man für  $m = 0$  die Legendre-Differentialgleichung erhält, so daß  $P_l^0 = P_l$ .

Man findet für  $m > 0$

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (\text{III.129})$$

Mit der Rodrigues-Formel daher

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (\text{III.130})$$

was für positive und negative  $m$  gilt. Weiter gilt

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (\text{III.131})$$

Die  $P_l^m$  sind orthogonal,

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll}. \quad (\text{III.132})$$

Wir hatten die Lösung der Laplace-Gleichung in 3 Faktoren zerlegt, die von den Variablen  $r$ ,  $\theta$  und  $\varphi$  abhängen. Wenn wir die Faktoren mit den Winkelabhängigkeiten zusammenfassen, erhalten wir die **Kugelflächenfunktionen** (im englischen *spherical harmonics*)  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , manchmal auch als  $Y_{lm}(\Omega)$  bezeichnet. Sie sind definiert als

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{III.133})$$

Es gilt

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \quad (\text{III.134})$$

und die Orthogonalitätsrelation

$$\int Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (\text{III.135})$$

Die Vollständigkeitsrelation ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \delta^{(2)}(\Omega - \Omega'). \quad (\text{III.136})$$

Die niedrigsten  $Y_{lm}$  sind (wobei negative  $m$  durch (III.134) erhalten werden können)

$$\begin{aligned}
Y_{00}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_{11}(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\
Y_{10}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\
Y_{22}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \\
Y_{21}(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\
Y_{20}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned} \tag{III.137}$$

Offenbar ist

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \tag{III.138}$$

Es gilt das Additionstheorem

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l(\cos \alpha), \tag{III.139}$$

worin  $\alpha = \angle(\Omega, \Omega')$  mit  $\Omega = (\theta, \varphi)$ ,  $\Omega' = (\theta', \varphi')$ .

Man kann jede beliebige Funktion  $g(\theta, \varphi)$  in die  $Y_{lm}$  entwickeln,

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{III.140}$$

mit den Koeffizienten

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi). \tag{III.141}$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung (die das Randwertproblem ohne Ladungen beschreibt) ist dann

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{III.142}$$

und die Koeffizienten  $A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  sind durch die Randbedingungen bestimmt. Für Dirichlet-Randbedingungen  $\phi = 0$  im Unendlichen folgt z. B.  $A_{lm} = 0$ .

### III.7 Elektrische Multipole beliebiger Ordnung

Die Lösung der Poisson-Gleichung ist allgemein

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \tag{III.143}$$

Wir interessieren uns wieder für das Potential einer *lokalisierten* Ladungsverteilung  $\rho$ , z. B. mit  $\rho(\mathbf{x}') = 0$  für  $|\mathbf{x}'| > R$ . Für große  $r > R > r'$  können wir daher die Entwicklung (siehe (III.102))

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \left(\frac{r'}{r}\right)^l \quad (\text{III.144})$$

einsetzen und erhalten

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \frac{r'^l}{r^{l+1}} d^3x' \quad (\text{III.145})$$

mit  $\alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Mit dem Additionstheorem für die Kugelflächenfunktionen (III.139) gilt daher

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \int \rho(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d^3x' \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}. \quad (\text{III.146})$$

Definieren wir die (statischen) **Multipolmomente** in Kugelkoordinaten

$$Q_{lm} := \int \rho(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d^3x' \quad (\text{III.147})$$

gilt also für  $r > R$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \quad (\text{III.148})$$

Die  $Q_{lm}$  sind im allgemeinen komplexe Zahlen, und es gilt

$$Q_{l,-m} = (-1)^m Q_{lm}^*. \quad (\text{III.149})$$

Es gibt jeweils  $2l + 1$  Multipolmomente der Ordnung  $l$ . Dies entspricht unseren Erwartungen aus der Kenntnis der Multipolmomente in kartesischen Koordinaten:

$l = 0$   $\longleftrightarrow$  1 Komponente: Gesamtladung  $Q$

$l = 1$   $\longleftrightarrow$  3 Komponenten von  $\mathbf{p}$

$l = 2$   $\longleftrightarrow$  5 Komponenten von  $(q_{kl})$

Es ist

$$Q_{00} = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{\sqrt{4\pi}} d^3x' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q \quad (\text{III.150})$$

mit der Gesamtladung  $Q$  und das Potential zu dieser Ordnung ist

$$\varphi_{00}(\mathbf{x}) = 4\pi \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \frac{Y_{00}}{r} = \frac{Q}{r}. \quad (\text{III.151})$$

Weiter finden wir für die Dipolmomente

$$\begin{aligned}
 Q_{10} &= \int \rho(\mathbf{x}') r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' d^3 x' \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') z' d^3 x' \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3
 \end{aligned} \tag{III.152}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= - \int \rho(\mathbf{x}') r' \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{-i\varphi'} d^3 x' \\
 &= - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') r' [\cos \varphi' \sin \theta' - i \sin \varphi' \sin \theta'] d^3 x' \\
 &= - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') [x' - iy'] d^3 x' \\
 &= - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 - ip_2)
 \end{aligned} \tag{III.153}$$

$$Q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 + ip_2), \tag{III.154}$$

sowie in ähnlicher Weise für die Quadrupolmomente

$$\begin{aligned}
 Q_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') (x' - iy')^2 d^3 x' \\
 &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (q_{11} - q_{22} - 2iq_{12})
 \end{aligned} \tag{III.155}$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (q_{13} - iq_{23}) \tag{III.156}$$

$$Q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} q_{33} \tag{III.157}$$

$$Q_{2,-1} = -Q_{21}^* \tag{III.158}$$

$$Q_{2,-2} = Q_{22}^*. \tag{III.159}$$

Wir hatten gesehen, daß sich ein Koordinatensystem finden läßt, so daß

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} |\mathbf{p}|, \quad Q_{11} = 0, \quad Q_{1,-1} = 0. \tag{III.160}$$

Ähnlich ist für das Quadrupolmoment eine Koordinatenwahl möglich, so daß

$$\begin{aligned}
 Q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (q_{11} - q_{22}) \\
 Q_{21} &= -Q_{2,-1} = 0 \\
 Q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} q_{33}.
 \end{aligned} \tag{III.161}$$

Für axialsymmetrisches  $\rho$  ist zudem  $q_{11} = q_{22}$ , d. h.  $Q_{22} = 0$ . Dann

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} &= \frac{4\pi}{5} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} q_{33} \frac{\sqrt{\frac{5}{4\pi}} P_2(\cos \theta)}{r^3} \\ &= \frac{1}{2} q_{33} \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3}\end{aligned}\tag{III.162}$$

wie gehabt.

Allgemein lassen sich von den  $2l + 1$  Komponenten des Multipols  $l$ -ter Ordnung durch geeignete Koordinatenwahl 3 beliebig wählen (etwa durch Fixierung der Euler-Winkel). Die  $Q_{lm}$  enthalten dann für  $l > 1$  nur noch  $2l - 2$  **innere** Komponenten.

# Kapitel IV

## Magnetostatik

Magnetostatische Probleme können mit ähnlichen Methoden behandelt werden wie die der Elektrostatik. Insbesondere kann man auch hier bei lokalisierten Stromverteilungen die Multipolentwicklung anwenden. Im folgenden beschränken wir uns auf wenige Aspekte, von denen einige charakteristische Eigenheiten der Magnetostatik aufgreifen.

Wir hatten bereits die Grundgleichungen der Magnetostatik kennengelernt, die aus den Maxwell-Gleichungen im statischen Fall ( $\dot{\mathbf{E}} = 0$ ,  $\dot{\mathbf{B}} = 0$ ) folgen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.\end{aligned}\tag{IV.1}$$

Letzteres ist die differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes. Für das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  mit

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}\tag{IV.2}$$

konnten wir die Coulomb-Eichung wählen, d. h.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.\tag{IV.3}$$

Dies war immer durch eine geeignete Eichtransformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi\tag{IV.4}$$

mit einer Funktion  $\chi(\mathbf{x})$  zu erreichen.  $\mathbf{B}$  ist eichinvariant. In Coulomb-Eichung gilt dann

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},\tag{IV.5}$$

und die (eindeutige) Lösung war

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'.\tag{IV.6}$$

Daraus folgt das Biot-Savartsche Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'.\tag{IV.7}$$

Wir können also das Vektorpotential und die magnetische Induktion einer gegebenen (statischen) Stromverteilung berechnen.

## IV.1 Magnetfeld eines geradlinigen Leiters

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen geradlinigen, unendlich langen Draht, der vom Strom  $I$  durchflossen wird. Der Draht habe einen vernachlässigbar kleinen Querschnitt und sei in 3-Richtung orientiert. Die Stromdichte ist dann

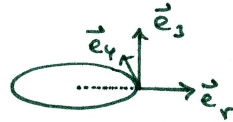
$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 I \delta(x_1) \delta(x_2). \quad (\text{IV.8})$$

Nach dem Ampèreschen Gesetz ist

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (\text{IV.9})$$

Da nach (IV.6) offenbar  $\mathbf{A} \sim \mathbf{e}_3$ , haben wir  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \sim \mathbf{e}_\varphi$ :

$$\mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{IV.10})$$



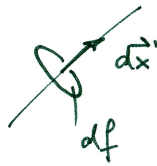
Also ist

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} I, \quad (\text{IV.11})$$

so daß

$$\mathbf{B}(r) = \frac{2I}{c} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{IV.12})$$

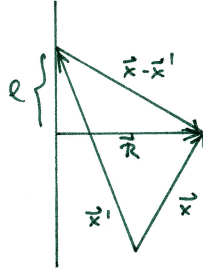
Alternativ können wir das Magnetfeld nach dem Biot-Savartschen Gesetz bestimmen. Für einen dünnen Leiter können wir die Integration zerlegen in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil,  $d^3x' = df d\mathbf{x}$ .



Der Strom ist  $I = |\mathbf{j}| df$ , und  $\mathbf{j} \sim d\mathbf{x}'$  ist entlang des Leiters orientiert. Das Integral  $\int df$  kann mit der  $\delta$ -Funktion für den dünnen Leiter leicht ausgeführt werden, so daß aus  $\mathbf{j} d^3x'$  der Ausdruck  $I d\mathbf{x}'$  wird, den wir entlang der Leiterkurve integrieren. Daher

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{I}{c} \int_{\text{Leiter}} d\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{I}{c} \mathbf{e}_3 \times \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\mathbf{R}}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2I}{cR} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

wobei wir  $\mathbf{R}$  folgendermaßen gewählt haben



so daß  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = R^2 + l^2$ . Im zweiten Schritt haben wir benutzt, daß nur Komponenten senkrecht zu  $\mathbf{e}_3$  zum Integral beitragen. Mit der Ersetzung  $R \rightarrow r$  erhalten wir also dasselbe Resultat wie oben.

## IV.2 Kraft auf einen Strom im Magnetfeld

Für eine bewegte Ladungsverteilung  $\rho$  erhält man allgemein, d. h. auch für zeitabhängige Fälle, die zugehörige Stromdichte als  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , oder expliziter

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{IV.14})$$

Aus der Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{IV.15})$$

erhalten wir dann die Kraft auf ein kleines Volumen  $\delta V$

$$\delta \mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \delta V \quad (\text{IV.16})$$

mit der **Kraftdichte**

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.17})$$

Die Kraft auf das Volumen  $V$  wird dann

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{k}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{IV.18})$$

Damit wirkt auf eine Stromverteilung  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  im Magnetfeld  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  die Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.19})$$

Zum Beispiel wirkt auf einen Stromkreis (2) im Feld eines anderen (1) die Kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Darin ist (siehe (II.49))

$$\frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \left( \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}_1(\mathbf{x}'). \quad (\text{IV.21})$$



Daher aus (IV.20)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' [\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x})] \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' \left[ \left( \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \right] \mathbf{j}_1(\mathbf{x}'). \quad (\text{IV.22})$$

Da aber das Integral

$$\int d^3x \left( \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) = - \int d^3x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.23})$$

für den Kreisstrom 2 wegen der Quellenfreiheit ( $\text{div } \mathbf{j}_2 = 0$ ), verschwindet, erhalten wir

$$\mathbf{K}_2 = -\frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' [\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x})] \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (\text{IV.24})$$

Dieses Kraftgesetz zeigt die Symmetrie unter Vertauschung der beiden Stromkreise: Man erhält  $\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2$  durch die Vertauschungen  $1 \leftrightarrow 2$  und  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ .

Nehmen wir zwei dünne Leiter an, können wir nach den Überlegungen aus Abschnitt IV.1 schreiben

$$\mathbf{K}_2 = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (\text{IV.25})$$

### IV.3 Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol

Auch für lokalisierte Stromverteilungen ist es sinnvoll, eine Multipolentwicklung durchzuführen. Dabei geht es wieder darum, einige wenige Eigenschaften der Stromverteilung zu berechnen, die die führenden Beiträge zum Magnetfeld bei großen Abständen von der Stromverteilung bestimmen.

Wir betrachten eine lokalisierte Stromverteilung  $\mathbf{j}(\mathbf{x}')$  nahe am Ursprung, d. h.  $\mathbf{j}(\mathbf{x}') = 0$  für  $|\mathbf{x}'| > L$  mit einem vorgegebenen  $L$ . Für große  $|\mathbf{x}|$  ( $|\mathbf{x}| \gg L$ ) können wir dann eine Taylorentwicklung in  $r/r'$  durchführen. (Natürlich ist wieder  $r = |\mathbf{x}|$  und  $r' = |\mathbf{x}'|$ .)

Das Vektorpotential der Stromverteilung in Coulomb-Eichung ist nach (II.48)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (\text{IV.26})$$

Durch Entwickeln in eine Taylorreihe erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{cr^3} \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' + \dots \\ &=: \mathbf{A}_{(0)}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Für große  $r$  ist  $\mathbf{j} = 0$  und wegen  $\dot{\rho} = 0$  auch  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Für einen beliebigen konstanten Vektor  $\mathbf{a}$  gilt weiter

$$\text{div}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}] = \mathbf{j} \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \underbrace{\text{div } \mathbf{j}}_{=0} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}. \quad (\text{IV.28})$$

Nach dem Gaußschen Satz also

$$\int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} d^3x = \int_V \text{div}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}] d^3x = \int_{\partial V} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 0, \quad (\text{IV.29})$$

da  $\mathbf{j} = 0$  auf  $\partial V$  bei großem  $r$ . Dies gilt für jedes konstante  $\mathbf{a}$ , insbesondere für  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .  
Daher

$$\int_V \mathbf{j} d^3x = 0. \quad (\text{IV.30})$$

Daher

$$\boxed{\mathbf{A}_{(0)}(\mathbf{x}) = 0} \quad (\text{IV.31})$$

Der erste Term  $\mathbf{A}_{(0)}(\mathbf{x})$  in der Taylorentwicklung von  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  verschwindet. Es gibt also keine magnetischen Monopolfelder!

Um den nächsten Term  $\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x})$  in der Entwicklung (IV.27) zu vereinfachen, betrachten wir zunächst folgenden Ausdruck, der darin vorkommt:

$$[(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{j}]_l = x_k x'_k j_l. \quad (\text{IV.32})$$

Wir zerlegen darin  $x'_k j_l$  in einen symmetrischen Anteil  $S_{kl}$  und einen antisymmetrischen Anteil:

$$\begin{aligned} x'_k j_l &= \frac{1}{2}(x'_k j_l + x'_l j_k) + \frac{1}{2}(x'_k j_l - x'_l j_k) \\ &= S_{kl} + \frac{1}{2} \sum_m \epsilon_{klm} [\mathbf{x}' \times \mathbf{j}]_m. \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Mit

$$j_l = \operatorname{div}(\mathbf{j}x_l) = x_l \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{j}}_{=0} + \mathbf{j} \cdot \underbrace{\operatorname{grad} x_l}_{=\mathbf{e}_l} \quad (\text{IV.34})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int x'_k j_l d^3x' &= \int x'_k \operatorname{div}_{x'}(\mathbf{j}x'_l) d^3x' \\ (\text{part. Int.}) &= - \int \underbrace{(\nabla_{x'} x'_k)}_{\mathbf{e}_k} \cdot \mathbf{j} x'_l d^3x' \\ &= - \int j_k x'_l d^3x', \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

woraus folgt, daß

$$\int S_{kl} d^3x' = \frac{1}{2} \int (x'_k j_l + x'_l j_k) d^3x' = 0. \quad (\text{IV.36})$$

Es bleibt bei der Berechnung von  $\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x})$  in (IV.27) also nur der antisymmetrische Anteil aus (IV.33) zu berücksichtigen. Daher

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{cr^3} \sum_l \mathbf{e}_l \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') j_l(\mathbf{x}') d^3x' \\ (\text{nur antisymm. Anteil}) &= \frac{1}{2cr^3} \sum_l \mathbf{e}_l \int \sum_{k,m} x_k \epsilon_{klm} [\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')]_m d^3x' \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \sum_l \mathbf{e}_l \int [\mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}'))]_l d^3x' \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')) d^3x' \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Wir finden also

$$\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} \quad (\text{IV.38})$$

mit dem **magnetischen Dipolmoment** der Stromverteilung  $\mathbf{j}(\mathbf{x}')$

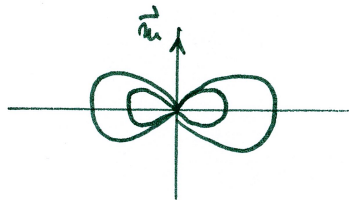
$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 x' \quad (\text{IV.39})$$

Man beachte die Analogie zum elektrischen Dipolmoment.

Die Äquipotentialflächen  $|\mathbf{A}_{(1)}| = \text{const}$  haben wegen

$$|\mathbf{A}_{(1)}| = \frac{|\mathbf{m}| \sin \theta}{r^2} \quad (\text{IV.40})$$

die folgende Form:



Das **magnetische Dipolfeld**  $\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x})$ , das sich aus  $\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x})$  ergibt, ist

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) &= \text{rot } \mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) \\ &= -\nabla_x \times \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{m}}{r^3} \\ &= -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \mathbf{m} \text{div} \frac{\mathbf{x}}{r^3}. \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

Also

$$\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} \quad (\text{IV.42})$$

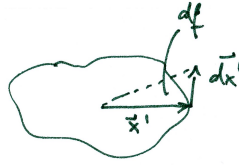
Höhere Multipolmomente können ganz analog zur Elektrostatik definiert werden. Auch dabei kann man höhere Multipolmomente mittels kartesischer Koordinaten oder mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen definieren.

#### IV.4 Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

Wir betrachten als Spezialfall einen ebenen Ringstrom. Der Strom fließe in einem dünnen Leiter, in dem der Strom  $\mathbf{j}$  konstant über den Querschnitt sei. Wir können dann in der Integration ersetzen

$$\mathbf{j} d^3 x \longrightarrow I d\mathbf{x}, \quad (\text{IV.43})$$

wobei  $I$  die Stromstärke im Leiter ist.



Dann ist das magnetische Dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} I \oint \mathbf{x}' \times d\mathbf{x}' = \frac{I}{c} \mathbf{f}, \quad (\text{IV.44})$$

d. h.

$$|\mathbf{m}| = \frac{I}{c} \cdot \text{Flächeninhalt}. \quad (\text{IV.45})$$

Wenn wir den Strom als einzelne bewegte Ladungen auffassen, so ist

$$\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (\text{IV.46})$$

und aus der Definition von  $\mathbf{m}$  folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \sum_i q_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i \frac{q_i}{2m_i c} \mathbf{L}_i, \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

worin  $\mathbf{L}_i$  der Drehimpuls des Teilchens  $i$  ist. Falls nur eine Sorte von Ladungsträger mit Masse  $m$  und Ladung  $q$  beiträgt, ist mit dem gesamten Drehimpuls  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}. \quad (\text{IV.48})$$

Für ein Teilchen nennt man das Verhältnis von  $\mathbf{m}$  zu  $\mathbf{L}$  das **gyromagnetische Verhältnis**.

Für Orbitalströme in Atomen ist das gyromagnetische Verhältnis

$$\frac{q}{2mc}. \quad (\text{IV.49})$$

Für Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  gilt dagegen

$$\mathbf{m} = g \frac{q}{2mc} \mathbf{s} \quad (\text{IV.50})$$

mit  $g \neq 1$ . Der Spin ist daher *kein* normaler Drehimpuls. Für das Elektron bezeichnet man

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (\text{IV.51})$$

als **Bohrsches Magneton** und findet für den **g-Faktor**

$$g_e = 2.0023 \dots \quad (\text{IV.52})$$

Dieser Faktor ist klassisch nicht erklärbar. Er tritt als Effekt der relativistischen Quantenmechanik auf, wo die Dirac-Gleichung auf  $g = 2$  führt. Die Abweichung von diesem Wert wiederum kann in der Quantenelektrodynamik (QED) berechnet werden. Seine experimentelle Messung stellt die genaueste Überprüfung der QED überhaupt dar.

## IV.5 Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol

Wir betrachten nochmals die Lorentz-Kraft ergibt (IV.19)

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{IV.53})$$

Entwickeln wir darin das Feld um den Ursprung,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(0) + (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{x}=0} + \dots, \quad (\text{IV.54})$$

so ergibt der nullte Term wegen (IV.30)

$$-\frac{1}{c} \mathbf{B}(0) \times \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x = 0. \quad (\text{IV.55})$$

Der erste Term ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times [(\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{x}=0}] d^3x \\ &= (\mathbf{m} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}|_{\mathbf{x}=0}, \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

wie man nach kurzer Rechnung findet. Eine Kraft wirkt also nur, falls für mindestens ein  $i$  gilt  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \neq 0$ , das Feld also inhomogen ist.

Das Drehmoment ist dann

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (\text{IV.57})$$

und die potentielle Energie

$$W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.58})$$

Die potentielle Energie ist also minimal, falls  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$ , also gerade wenn  $\mathbf{M} = 0$ .

## Kapitel V

# Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen, elektromagnetische Wellen

Wir betrachten jetzt wieder die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen, für die wir im folgenden allgemeine Lösungen finden wollen.

Die Maxwell-Gleichungen konnten, wie wir in Kapitel I.6.c gesehen haben, in zwei Gruppen aufgeteilt werden: die **homogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{V.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{V.2})$$

und die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (\text{V.3})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{V.4})$$

Die Ladungs- und Stromverteilungen  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  treten also nur in den inhomogenen Gleichungen auf.

Wir wollen im folgenden  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  als vorgegebene Funktionen von  $\mathbf{x}$  und  $t$  auffassen. Wir nehmen also an, daß die Bewegung aller geladenen Teilchen bekannt ist. Wir vernachlässigen die Rückwirkung des elektromagnetischen Feldes auf die Teilchen. Dieses Vorgehen ist also nur die 1. Näherung in einer systematischen Approximation.

Wir werden nun die homogenen Gleichungen durch Einführung der elektromagnetischen Potentiale  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  lösen. Die inhomogenen Gleichungen werden dann auf Wellengleichungen für  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  führen.

### V.1 Lösung der homogenen Gleichungen, allgemeine elektromagnetische Potentiale, Eichtransformationen

Aus  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  folgt, daß  $\mathbf{B}$  ein Wirbelfeld ist,

$$\boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}} \quad (\text{V.5})$$

mit einem zunächst beliebigen Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ . Einsetzen dieser Relation in (V.2) ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = 0, \quad (\text{V.6})$$

bzw.

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0. \quad (\text{V.7})$$

Daher ist der Ausdruck in Klammern ein Gradientenfeld:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{V.8})$$

oder

$$\boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}} \quad (\text{V.9})$$

mit einer zunächst beliebigen Funktion  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ .

Damit sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen gelöst, denn sie sind für jede Wahl von  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  und  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  erfüllt.

Allerdings sind  $\mathbf{A}$  und  $\varphi$  *nicht* eindeutig bestimmt. Wenn wir  $\mathbf{A}$  derart transformieren, daß

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \quad (\text{V.10})$$

mit einer beliebigen Funktion  $\chi(\mathbf{x}, t)$ , so ändert sich  $\mathbf{B}$  nicht, denn

$$\mathbf{B}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi}_{=0} = \mathbf{B}. \quad (\text{V.11})$$

Damit dann auch  $\mathbf{E}$  invariant bleibt, müssen wir auch  $\varphi$  transformieren, und zwar so, daß

$$-\operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}' = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}. \quad (\text{V.12})$$

Mit  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$  ergibt das

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial t} \chi &= -\operatorname{grad} \varphi \\ \implies \operatorname{grad} \left( \varphi' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi \right) &= \operatorname{grad} \varphi, \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

so daß die Transformation von  $\varphi$  gerade ist

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi. \quad (\text{V.14})$$

Damit finden wir:

**$\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bleiben invariant unter der Eichtransformation**

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

mit einer *beliebigen* Funktion  $\chi(\mathbf{x}, t)$ .

Diese Transformationen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte **Eichgruppe**.

Für den Spezialfall

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \chi_0(\mathbf{x}) - ctC \quad (\text{V.16})$$

mit  $C = \text{const.}$  erhält man die Eichtransformation der statischen Theorie (vgl. (II.39), (II.40)),

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \varphi + C, \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \chi_0 \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

Die Potentiale  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  haben *keine* direkte physikalische Bedeutung, sie sind *nicht meßbar*.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind dagegen meßbar, d. h. sie sind **Observablen**. Im Gegensatz zu  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  sind sie **eichinvariant**. Alle Observablen sind eichinvariant.

## V.2 Die inhomogenen Gleichungen, Coulomb- und Lorenz-Eichung

Mit (V.5) und (V.9) folgt aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (V.3) und (V.4):

$$-\Delta\varphi - \frac{1}{c} \text{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi\rho \quad (\text{V.18})$$

und

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} &= \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

bzw.

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} + \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{V.20})$$

Wir können nun versuchen, die beiden Gleichungen (V.18) und (V.20) durch geeignete Eichtransformationen zu vereinfachen.

### V.2.a Coulomb-Eichung

Man kann (wie in der statischen Theorie, jetzt aber für alle  $t$ ) die Nebenbedingung bzw. **Eichbedingung**

$$\boxed{\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0} \quad (\text{V.21})$$

für alle  $t$  wählen. Dies nennt man die **Coulomb-Eichung**<sup>1</sup>, **transversale Eichung** oder **Strahlungseichung**. Daß diese Wahl auch im allgemeinen, zeitabhängigen Fall immer möglich ist, können wir folgendermaßen erkennen. Sei etwa  $\text{div } \mathbf{A} = 4\pi\eta(\mathbf{x}, t) \neq 0$ , und sei  $\chi$  die Funktion in der Eichtransformation, so daß

$$\text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \Delta\chi = 0, \quad (\text{V.22})$$

<sup>1</sup>Sie ist benannt nach Charles Augustin de Coulomb.



d. h.

$$\Delta\chi = -4\pi\eta(\mathbf{x}, t). \quad (\text{V.23})$$

Dies wird durch

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\eta(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{V.24})$$

gelöst, und wir haben damit ein geeignetes  $\chi$ , um auf die Coulomb-Eichung zu gelangen.

Mit  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  vereinfacht sich (V.18) und wird zu

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{x}, t), \quad (\text{V.25})$$

also zur bekannten Poisson-Gleichung, die wir bereits aus der Elektrostatik kennen. Deren eindeutige Lösung ist

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{V.26})$$

Das skalare Potential wird also in Coulomb-Eichung zu jeder Zeit  $t$  durch dieser Zeit vorhandene Ladungsdichte bestimmt und zwar durch die aus der Elektrostatik bekannte Coulomb-Formel. (Daher stammt auch der Name dieser Eichung.) Dies wird als das **instantane Coulomb-Potential** bezeichnet. Zeitliche Änderungen der Ladungsdichte übertragen sich *sofort* (gleichsam mit unendlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit) auf  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ .  $\varphi$  ist aber *keine* Observable. Man kann zeigen:<sup>2</sup> das instantane Coulomb-Potential impliziert *keine* Verletzung des Prinzips, daß sich Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Es kommt daher nicht zu einer Verletzung der Kausalität.

Aus (V.20) erhalten wir dann

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \text{grad} \frac{1}{c} \int \frac{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (\text{V.27})$$

und wegen  $\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  also

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \text{grad} \int \frac{\text{div } \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

worin wir den **d'Alembert-Operator**

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (\text{V.29})$$

und die **transversale Komponente des Stroms**

$$\mathbf{j}_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) - \text{grad} \int \frac{\left(-\frac{1}{4\pi}\right) \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{V.30})$$

<sup>2</sup>Siehe z. B. O. L. Brill, B. Goodman, *Causality in the Coulomb Gauge*, Am. J. Phys. 35 (1967) 832; C. W. Gardiner, P. D. Drummond, *Causality in the Coulomb gauge: A direct proof*, Phys. Rev. A38 (1988) 4897; J. D. Jackson, *From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations*, Am. J. Phys. 70 (2002) 917 [arXiv:physics/0204034 [physics.class-ph]].

definiert haben.

Die Bezeichnung 'transversal' kommt daher, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j}_t &= \nabla \cdot \mathbf{j} - \int \Delta_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( -\frac{1}{4\pi} \right) \nabla_{x'} \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) d^3x' \\ &= \nabla \cdot \mathbf{j} - \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_{x'} \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) d^3x' \\ &= \nabla \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot \mathbf{j} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

Also  $\nabla \cdot \mathbf{j}_t = 0$ , d. h.  $\mathbf{j}_t$  ist **transversal** oder orthogonal zu  $\nabla$ . (Im Fourier-Raum ist  $\mathbf{j}_t$  orthogonal zu  $\mathbf{k}$ .) Analog heißt

$$\mathbf{j}_l = \operatorname{grad} \int \frac{\left( -\frac{1}{4\pi} \right) \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{V.32})$$

die **longitudinale Komponente des Stroms**, d. h.  $\mathbf{j}_l$  ist parallel zu  $\nabla$ , denn  $\nabla \times \mathbf{j}_l = 0$ . Mit der Kontinuitätsgleichung  $\operatorname{div} \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0$  ist

$$\mathbf{j}_l = \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (\text{V.33})$$

Die longitudinale Komponente des Stroms ist also eindeutig durch die Ladungsdichte bestimmt.

Zusammenfassend finden wir also in der Coulomb-Eichung  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ :

- Das skalare Potential  $\varphi$  ist durch die Coulomb-Formel beschrieben.
- Das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  wird durch den transversalen Anteil des Stroms beschrieben. (Daher stammt die Bezeichnung 'transversale Eichung'.)

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, daß für  $\rho = 0$  und  $\mathbf{j} = 0$ , d. h. im ladungs- und stromfreien Raum,

$$\varphi = 0. \quad (\text{V.34})$$

Es ist also nur  $\mathbf{A}$  von Null verschieden und ist eine Lösung der Gleichung

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (\text{V.35})$$

Wie wir sehen werden, sind allgemein in der Coulomb-Eichung (transversale) Strahlungsfelder nur durch  $\mathbf{A}$  gegeben,  $\varphi$  trägt nur im Nahfeld einer Ladungsverteilung bei. (Daher stammt die Bezeichnung 'Strahlungseichung'.)

In der Coulomb-Eichung ist offenbar die Behandlung von  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  nicht symmetrisch. Dies ist für die relativistisch invariante Beschreibung (s. später) ungünstig.

### V.2.b Lorenz-Eichung

In der **Lorenz-Eichung**<sup>3</sup> stellt man die in  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  symmetrische Eichbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.36})$$

<sup>3</sup>Diese Eichung ist benannt nach Ludvig V. Lorenz, *nicht* nach Hendrik A. Lorentz – auch wenn die falsche Schreibweise in der Literatur weit verbreitet ist. Nach H. A. Lorentz sind die Lorentz-Transformationen benannt.

Damit vereinfacht sich die Gleichung (V.20) zu

$$\boxed{\square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{V.37})$$

und wegen

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (\text{V.38})$$

wird Gleichung (V.18) zu

$$\boxed{\square \varphi(\mathbf{x}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{V.39})$$

Damit genügen in Lorenz-Eichung  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  einer **Wellengleichung**.

Wir überprüfen noch, daß die Lorenz-Eichung immer durch eine Eichtransformation erreicht werden kann. Sei etwa  $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 4\pi \eta(\mathbf{x}, t) \neq 0$  und  $\chi(\mathbf{x}, t)$  die gesuchte Funktion für eine Eichtransformation (V.15) in die Lorenz-Eichung. Dann muß gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\ &= 4\pi \eta - \square \chi = 0, \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

woraus folgt

$$\square \chi = 4\pi \eta. \quad (\text{V.41})$$

Dies ist aber gerade die Gleichung, die wir im folgenden Abschnitt lösen werden. Mit deren Lösung für ein beliebiges  $\eta(\mathbf{x}, t)$  ist dann gezeigt, daß die Lorenz-Eichung immer durch eine Eichtransformation erreicht werden kann.

Es ist zu beachten, daß in der Lorenz-Eichung  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  *nicht* eindeutig bestimmt sind. Wir können bei Vorliegen der Lorenz-Eichung noch Umeichungen durchführen, deren Eichfunktion  $\chi$  die Bedingung

$$\square \chi = 0 \quad (\text{V.42})$$

erfüllt. Man sagt, daß es sich bei der Lorenz-Eichung um eine **unvollständige Eichung** handelt.

### V.2.c Andere Eichungen

Man unterscheidet eine Reihe weiterer Eichbedingungen, die in verschiedenen Situationen mit (mehr oder weniger) Gewinn benutzt werden. Unter den wichtigsten anderen Eichungen sind

- die **temporale Eichung** oder **Weyl-Eichung**

$$\varphi = 0, \quad (\text{V.43})$$

deren Eichbedingung oft auch als  $A^0 = 0$  angegeben wird (eine Notation, die wir später kennenlernen werden). Auch die temporale Eichung ist eine unvollständige Eichung.

- die **axiale Eichung**

$$A_3 = 0, \quad (\text{V.44})$$

oder allgemeiner  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$  für einen vorgegebenen Vektor  $\mathbf{n}$  mit  $|\mathbf{n}| = 1$ .

Der Vorteil der Lorenz-Eichung ist ihre Invarianz unter Lorentz-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie (s. später). Die Lorentz-Invarianz ist in den anderen Eichungen nicht manifest.

### V.3 Lösung der freien Wellengleichung

Offenbar ist die Wellengleichung für die Lösung der Maxwell-Gleichungen von großer Bedeutung. Wir hatten bereits gesehen, daß in Coulomb-Eichung  $\mathbf{A}$  Lösung der Wellengleichung ist, und daß in Lorenz-Eichung  $\mathbf{A}$  und  $\varphi$  Lösungen der Wellengleichung sind. Darüber hinaus kann man zeigen, daß direkt aus den Maxwell-Gleichungen auch Wellengleichungen für die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  resultieren, falls  $\rho = 0$  und  $\mathbf{j} = 0$  (siehe Übungen). Außerdem treten Wellengleichungen allgemein in der Physik in verschiedenen Zusammenhängen auf.

Um die allgemeine Lösung der Wellengleichung zu finden, ist es nützlich, zunächst die **freie Wellengleichung** (oder **homogene Wellengleichung**)

$$\square \psi(\mathbf{x}, t) = -\Delta \psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{V.45})$$

zu studieren. Der Begriff 'frei' bezieht sich dabei auf die Abwesenheit von Quellen, d. h.  $\rho = 0$  und  $\mathbf{j} = 0$ .

Es stellt sich als nützlich heraus, komplexwertige Lösungen der Wellengleichung zu suchen. Für reelle Größen kann man dann den Realteil der komplexwertigen Lösung nehmen.

#### V.3.a Lösung durch ebene Wellen

Wir machen den Ansatz einer **ebenen Welle**

$$\psi(\mathbf{x}, t) = a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (\text{V.46})$$

Dabei heißt  $\mathbf{k}$  der **Wellenzahlvektor**, und wir definieren  $k = |\mathbf{k}|$ . Man bezeichnet  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  als **Wellenlänge** der Welle, denn für festes  $t$  ist  $\psi$  eine periodische Funktion des Orts mit Periode  $\lambda$  in Richtung  $\mathbf{k}$ :

$$\psi\left(\mathbf{x} + \lambda \frac{\mathbf{k}}{k}, t\right) = \psi(\mathbf{x}, t) e^{i\lambda \frac{\mathbf{k}^2}{k}} = \psi(\mathbf{x}, t) e^{i2\pi} = \psi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{V.47})$$

$\omega$  heißt **Kreisfrequenz**,  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  die Frequenz.  $\frac{2\pi}{\omega} = T = \frac{1}{\nu}$  ist die **Schwingungsdauer** der ebenen Welle, denn für festes  $\mathbf{x}$  ist  $\psi$  eine periodische Funktion der Zeit  $t$  mit Periode  $T$ :

$$\psi(\mathbf{x}, t + T) = \psi(\mathbf{x}, t) e^{-iT\omega} = \psi(\mathbf{x}, t) e^{-i2\pi} = \psi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{V.48})$$

Der Ansatz (V.46) ergibt in der freien Wellengleichung (V.45) die Terme

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= (i\mathbf{k})^2 \psi \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \psi, \end{aligned} \quad (\text{V.49})$$

so daß aus der freien Wellengleichung ein Zusammenhang zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\omega$  folgt:

$$\begin{aligned} \left[ -(i\mathbf{k})^2 + \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \right] \psi &= 0 \\ \implies \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad |\mathbf{k}| = k = \pm \frac{\omega}{c}. \end{aligned} \quad (\text{V.50})$$

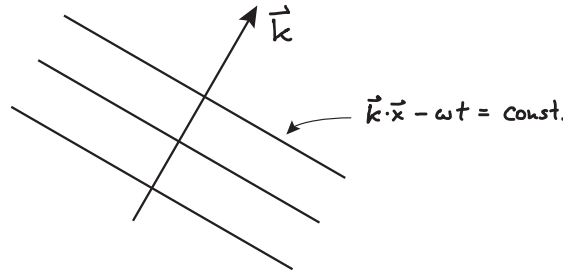
Anders ausgedrückt gilt

$$\lambda = cT \quad \text{bzw.} \quad \lambda\nu = c. \quad (\text{V.51})$$

Wir nennen  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$  die **Phase** der Welle. Flächen konstanter Phase,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{const.}, \quad (\text{V.52})$$

stehen *senkrecht* auf  $\mathbf{k}$ .



Ist nämlich z. B.  $\mathbf{k}$  entlang der 1-Achse orientiert, so haben die Zeit- und Ortspunkte  $t_0, \mathbf{x}_0$  und  $t, \mathbf{x}$  dieselbe Phase, wenn

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \omega t_0 \\ (k=k e_1) \implies kx - \omega t &= kx_0 - \omega t_0, \end{aligned} \quad (\text{V.53})$$

d. h.

$$x = x_0 + \frac{\omega}{k} (t - t_0), \quad (\text{V.54})$$

was Ebenen senkrecht zur 1-Richtung entspricht. Flächen konstanter Phase bewegen sich demzufolge mit der **Phasengeschwindigkeit**

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = c. \quad (\text{V.55})$$

■ Die Phasengeschwindigkeit der Welle  $\psi$  ist die Lichtgeschwindigkeit.

Wir werden später mit den Kugelwellen auch noch ein anderes mögliches Lösungssystem für die Wellengleichung kennenlernen.

### V.3.b Monochromatische ebene elektromagnetische Wellen, Polarisation ebener Wellen

Betrachten wir nun eine **monochromatische** ebene Welle, d. h. eine ebene Welle mit gegebenen  $\mathbf{k}$  und  $\omega = c|\mathbf{k}|$ . (Die allgemeine Lösung der freien Wellengleichung wird dann eine Überlagerung monochromatischer Wellen sein, siehe unten.)

Wir erhalten dann eine Lösung der freien Maxwell-Gleichung in *Strahlungseichung*: bei  $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$  folgt aus  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  sofort  $\varphi = 0$  und

$$\square \mathbf{A} = 0. \quad (\text{V.56})$$

Mit obiger ebener Welle erhalten wir eine Lösung dieser Gleichung als

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ &= \frac{\mathbf{A}_0}{|\mathbf{A}_0|} |\mathbf{A}_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ &= \boldsymbol{\epsilon} |\mathbf{A}_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{aligned} \quad (\text{V.57})$$

mit  $\omega = \pm|\mathbf{k}|c$ . Der Vektor  $\boldsymbol{\epsilon}$  ist unabhängig von  $\mathbf{x}$  und  $t$ , ist aber im allgemeinen ein komplexwertiger Vektor. Man bezeichnet  $\boldsymbol{\epsilon}$  als **Polarisationsvektor** der ebenen Welle. Wir betrachten hier wieder komplexwertige ebene Wellen, nehmen aber (was wir nicht explizit beschreiben) am Ende der Rechnung den Realteil, um reellwertige Größen zu erhalten.

Aus  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  folgt

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (\text{V.58})$$

d. h.  $\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\mathbf{k}$  stehen senkrecht aufeinander. Die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  können wir berechnen:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon} |A_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (\text{V.59})$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = i(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}) |A_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}, \quad (\text{V.60})$$

bzw. genauer  $\mathbf{E} = \operatorname{Re}(\dots)$  und  $\mathbf{B} = \operatorname{Re}(\dots)$ . Also finden wir

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{E} \quad (\text{V.61})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B}. \quad (\text{V.62})$$

Dieses Ergebnis ist eichinvariant, da es direkt durch die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  ausgedrückt ist. Es beruht letztlich auf  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  und  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , was für den Fall  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$  zutrifft.

Weiter sehen wir, daß

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| \quad (\text{V.63})$$

und

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}. \quad (\text{V.64})$$

Es folgt

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}. \quad (\text{V.65})$$

(Letztlich ist dies eine Folge von  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ .)

Wir sehen, daß eine solche ebene elektromagnetische Welle durch die Angabe von  $\mathbf{E}$  (oder von  $\mathbf{B}$ ) eindeutig beschrieben ist. Meistens wird hierfür  $\mathbf{E}$  verwendet.

■ Eine ebene elektromagnetische Welle breitet sich also mit der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung  $\mathbf{k}$  aus, ist transversal polarisiert, und  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  stehen senkrecht aufeinander und beide senkrecht auf  $\mathbf{k}$ .

Man beachte noch einmal, daß eine Komponente von  $\mathbf{A}_0$  parallel zu  $\mathbf{k}$  nichts zu den Feldstärken beiträgt.

### Polarisation

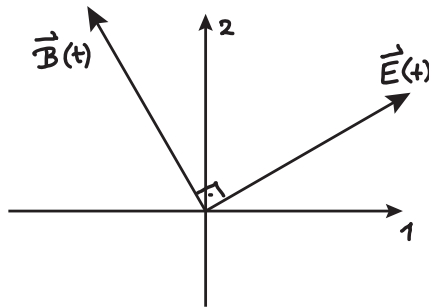
Wir wollen die Polarisation ebener Wellen genauer untersuchen. Dazu wählen wir  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$ , so daß

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\epsilon_1| e^{i\delta_1} \\ |\epsilon_2| e^{i\delta_2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{V.66})$$

Für einen festen Punkt  $\mathbf{x}_0$  folgt dann der folgende zeitliche Verlauf der Feldstärkekomponenten:

$$\begin{aligned}
 E_1(t) &= \operatorname{Re} \left[ |\epsilon_1| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \omega t + \frac{\pi}{2} + \delta_1)} \right] \\
 &= |\epsilon_1| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left( \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \\
 E_2(t) &= |\epsilon_2| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left( \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \\
 B_1(t) &= -|\epsilon_2| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left( \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \\
 B_2(t) &= |\epsilon_1| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left( \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) .
 \end{aligned}
 \tag{V.67}$$

Zu einem Zeitpunkt  $t$  ergibt sich dann eine Situation folgender Art, wobei  $\mathbf{k}$  auf uns zuzeigt:

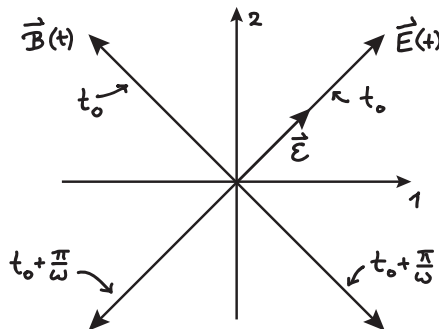


Es gibt nun die folgenden Spezialfälle.

(i)  $\delta_1 = \delta_2$  oder  $\delta_1 = \delta_2 + \pi$

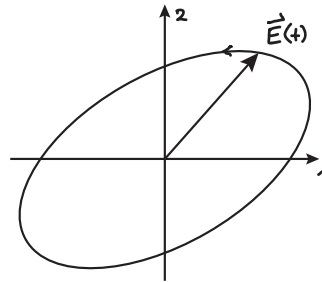
In diesem Fall spricht man von **linearer** Polarisation. In diesem Fall ist  $\epsilon$  reell, oder bis auf eine Phase reell:

$$e^{-i\delta_1} \epsilon = \text{reell} \tag{V.68}$$



(ii)  $\delta_1 \neq \delta_2$  und  $\delta_1 \neq \delta_2 + \pi$

Allgemein spricht man in diesem Fall von **elliptischer** Polarisation.



Speziell eine Ellipse mit den 1- und 2-Achsen als Hauptachsenrichtungen erhält man für  $\delta_2 - \delta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ .

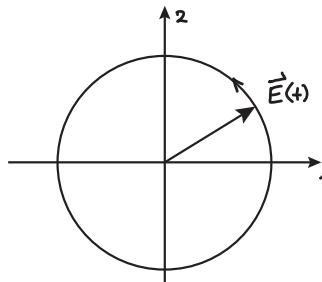
Spezialfall der elliptischen Polarisation ist die **zirkuläre** Polarisation:

(iii)  $\delta_2 = \delta_1 + \frac{\pi}{2}$  und  $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hier ist

$$\epsilon = e^{i\delta_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.69})$$

und man spricht von **linkszirkularer** Polarisation (oder von Helizität +1).

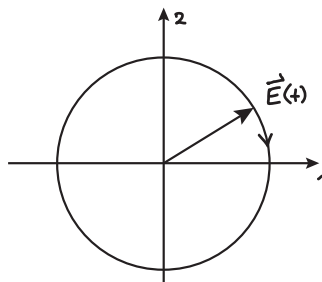


(iv)  $\delta_2 = \delta_1 - \frac{\pi}{2}$  und  $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hier ist

$$\epsilon = e^{i\delta_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.70})$$

und man spricht von **rechtszirkularer** Polarisation (oder von Helizität -1).





### V.3.c Allgemeine Lösung der freien Wellengleichung

Die freie Wellengleichung ist eine lineare Gleichung. Also ist mit  $\psi_1$  und  $\psi_2$  auch jede Linearkombination  $c\psi_1 + d\psi_2$  eine Lösung. Die allgemeine Lösung erhält man dann durch Superposition aller möglichen ebenen Wellen obiger Form. Dazu machen wir den Ansatz eines Fourier-Integrals<sup>4</sup> für die Raum- und Zeitkomponenten mit der **Spektralfunktion**  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) d^3k d\omega. \quad (\text{V.71})$$

Durch Einsetzen in die freie Wellengleichung (V.45) ergibt sich

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \left[ \mathbf{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right] \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) d^3k d\omega = 0. \quad (\text{V.72})$$

Nach dem Fourier-Umkehrtheorem gilt also

$$\left( \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (\text{V.73})$$

d. h.

$$\tilde{\psi} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{k}^2 \neq \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{V.74})$$

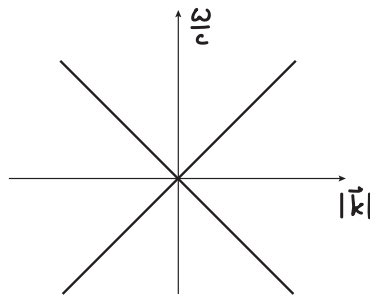
und

$$\tilde{\psi} \text{ beliebig} \quad \text{für} \quad \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{V.75})$$

Im 4-dimensionalen  $(\omega, \mathbf{k})$ -Raum darf  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega)$  also nur auf dem durch

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (\text{V.76})$$

gegebenen 3-dimensionalen Hyperkegel von Null verschieden sein.



Wir können diese Bedingung durch  $\delta$ -Funktionen ausdrücken. Dazu überlegen wir zunächst, daß die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$xf(x) = 0 \quad (\text{V.77})$$

gegeben ist durch

$$f(x) = a \delta(x) \quad (\text{V.78})$$

<sup>4</sup>Dies ist für jede stückweise glatte Funktion  $\psi(\mathbf{x}, t)$  möglich, was für unsere Zwecke hinreichend allgemein ist.

mit einer beliebigen Konstante  $a$ . Die Lösung von

$$(x - x_0)(x + x_0)f(x) = 0 \quad (\text{V.79})$$

ist dann

$$f(x) = a_+ \delta(x - x_0) + a_- \delta(x + x_0) \quad (\text{V.80})$$

mit beliebigen Konstanten  $a_{\pm}$  (und man kann zeigen, daß dies die allgemeinste Lösung ist). Fassen wir nun in (V.73)  $\mathbf{k}$  als Parameter auf und schreiben  $\omega_0 = c|\mathbf{k}|$ , so erhalten wir

$$(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (\text{V.81})$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist dann also

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = a_+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_0) + a_-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega_0). \quad (\text{V.82})$$

Einsetzen in den Ansatz (V.71) ergibt

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} [a_+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_0) + a_-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega_0)] d^3k d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int [a_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_0 t)} + a_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_0 t)}] d^3k. \end{aligned} \quad (\text{V.83})$$

Die allgemeinste Lösung der freien Wellengleichung hängt also von zwei Funktionen ab, die durch die Randbedingungen zu bestimmen sind.

Statt der beiden Funktionen  $a_{\pm}(\mathbf{k})$  können wir auch  $\psi(\mathbf{x}, t = 0)$  und  $\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t = 0)$  wählen, um die Lösung zu fixieren. Das entspricht der Formulierung des Problems als Cauchysches Anfangswertproblem. Um dies durchzuführen, beobachten wir, daß

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int [a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} i\omega_0 \int [-a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \end{aligned} \quad (\text{V.84})$$

und daher nach dem Fourierschen Umkehrsatz

$$\begin{aligned} a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \psi(\mathbf{x}', 0) \\ -a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi i\omega_0} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0). \end{aligned} \quad (\text{V.85})$$

Daher

$$\begin{aligned} a_+(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \left[ \psi(\mathbf{x}', 0) - \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0) \right] \\ a_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \left[ \psi(\mathbf{x}', 0) + \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.86})$$

Setzen wir dies wieder in (V.83) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3x' \left[ \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \right] \psi(\mathbf{x}', 0) \\ &\quad + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3x' \left[ \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{i\omega_0} \right] \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0). \end{aligned} \quad (\text{V.87})$$

Mit der Funktion

$$D(\mathbf{x}, t) := \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}) \quad (\text{V.88})$$

läßt sich das kürzer schreiben als

$$\psi(\mathbf{x}, t) = - \int d^3x' \left[ \frac{\partial D}{\partial t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \right] \psi(\mathbf{x}', 0) - \int d^3x' D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0). \quad (\text{V.89})$$

Wir können dies verallgemeinern, wenn wir die Lösung nicht bei  $t = 0$  sondern zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t = t'$  vorgeben. Wir können dann die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial t}$  durch  $\frac{\partial}{\partial t'}$  ersetzen, wobei im ersten Term durch die innere Ableitung ein Minuszeichen generiert wird. Damit erhalten wir

$$\psi(\mathbf{x}, t) = - \int d^3x' D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t'}} \psi(\mathbf{x}', t'), \quad (\text{V.90})$$

worin  $\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}$  definiert ist durch

$$f(t) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} g(t) = f(t) \frac{\partial}{\partial t} g(t) - g(t) \frac{\partial}{\partial t} f(t). \quad (\text{V.91})$$

Offenbar ist  $D(\mathbf{x}, t)$  Lösung der freien Wellengleichung (da nämlich (V.88) ein Spezialfall von (V.83) ist), d. h.

$$\square D(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (\text{V.92})$$

Weiter ist

$$D(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\text{V.93})$$

und

$$\frac{\partial D}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (\text{V.94})$$

womit sich die Richtigkeit von (V.89) für  $t = 0$  leicht überprüfen läßt.

Unter Verwendung sphärischer Polarkoordinaten für  $\mathbf{k}$  kann man folgenden einfachen Ausdruck für  $D(\mathbf{x}, t)$  herleiten (siehe Übungen):

$$D(\mathbf{x}, t) = \frac{-1}{2\pi c} \epsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2), \quad (\text{V.95})$$

wobei  $r = |\mathbf{x}|$  und

$$\epsilon(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } t < 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \\ +1 & \text{falls } t > 0. \end{cases} \quad (\text{V.96})$$

### V.3.d Kugelwellen

Es gibt neben den ebenen Wellen auch andere vollständige Lösungssysteme der freien Wellengleichung, unter denen die **Kugelwellen** besonders wichtig sind.

Wir betrachten die freie Wellengleichung in sphärischen Polarkoordinaten, in denen

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega, \quad (\text{V.97})$$

und nehmen eine kugelsymmetrische Form der Lösung an, d. h.  $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(r, t)$ . Damit erhalten wir

$$\square\psi = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(r\psi) = 0, \quad (\text{V.98})$$

so daß

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(r\psi) = 0. \quad (\text{V.99})$$

Die ist gerade die 1-dimensionale Wellengleichung für  $(r\psi)$ , deren Lösung wir bereits kennen:

$$r\psi = a e^{i(kr - \omega t)}, \quad (\text{V.100})$$

wobei aus der Wellengleichung wieder folgt

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{V.101})$$

Damit erhalten wir die Kugelwellen

$$\psi_{\pm}(\mathbf{x}, t) = A_{\pm} \frac{e^{i(kr \pm \omega t)}}{r}. \quad (\text{V.102})$$

Die Amplitude dieser Welle nimmt offenbar mit  $\frac{1}{r}$  ab. Für Flächen konstanter Phase,  $(kr \pm \omega t) = \text{const.}$  haben wir

$$r = \frac{\text{const.} \mp \omega t}{k} = \text{const.}' \mp \frac{\omega}{k} t. \quad (\text{V.103})$$

Daher beschreibt  $\psi_+$  eine einlaufende,  $\psi_-$  eine auslaufende Kugelwelle. Die Phasengeschwindigkeit ist wegen (V.101) offenbar wieder  $c$ . Flächen gleicher Phase haben zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$  den radialen Abstand

$$k \Delta r = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (\text{V.104})$$

Ganz analog zu den ebenen Wellen finden wir die Wellenlänge und Periode

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (\text{V.105})$$

Auch hier gilt, daß man für die elektromagnetischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  transversale Wellen erhält (siehe Übungen).

Die allgemeine Lösung der freien Wellengleichung kann man dann durch Überlagerung von Kugelwellen konstruieren.

Wie aus der in Kapitel III behandelten Vollständigkeit verschiedener Funktionensysteme hervorgeht, kann man ebene Wellen in Kugelwellen entwickeln und umgekehrt.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>In der quantenmechanischen Streutheorie spielt zum Beispiel die Entwicklung einer ebenen Welle in Kugelwellen eine große Rolle. Zur Illustration sei dieser Zusammenhang hier ohne Zeitabhängigkeit angeführt. Es gilt

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta), \quad (\text{V.106})$$

worin  $j_l(x)$  die sphärischen Besselfunktionen sind, die für große Argumente das Verhalten

$$j_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) = \frac{1}{2ix} (-i)^l \left(e^{ix} - (-1)^l e^{-ix}\right) \quad (\text{V.107})$$

haben, in dem man bereits in dieser Form das Auftreten von Kugelwellen erkennt.

### Kugelkoordinaten

Für die Behandlung kugelsymmetrischer Probleme, insbesondere für den Umgang mit Kugelwellen, sind sphärische Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten nützlich, an die wir hier noch einmal erinnern.

In Kugelkoordinaten  $(r, \varphi, \theta)$  sind die kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{V.108})$$

Wir können dann Basisvektoren in den Richtungen des Fortschreitens der Koordinaten  $r, \varphi, \theta$  definieren, indem wir das Linienelement  $d\mathbf{x}$  ausdrücken durch

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_r dr + r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi d\varphi + r \mathbf{e}_\theta d\theta, \quad (\text{V.109})$$

was ausgedrückt in kartesischen Basisvektoren bedeutet

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) - \sin \theta \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{V.110})$$

Entsprechend kann man jeden Vektor in Kugelkoordinaten schreiben, indem man seine Entwicklungskoeffizienten in der Entwicklung nach  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$  in einem dreidimensionalen Vektor zusammenfaßt. Dabei sollte unbedingt die Reihenfolge der Koeffizienten in dieser Anordnung beachtet werden, da es in der Literatur keine eindeutige Konvention gibt. (Wir benutzen hier die gerade genannte Reihenfolge.)

Mittels der Jacobi-Matrix des Koordinatenwechsels von  $(x, y, z)$  zu  $(r, \varphi, \theta)$  kann man dann (unter Beachtung der Kettenregel) Gradient, Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten ausdrücken. Man findet für den Gradienten

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (\text{V.111})$$

oder als Vektor in der Basis  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{V.112})$$

Bei der Berechnung der Divergenz und Rotation ist zu beachten, daß die Basisvektoren  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$  Funktionen von  $\varphi$  und  $\theta$  sind, so daß die Produktregel anzuwenden ist, z. B. in

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(r, \varphi, \theta) = \nabla \cdot [a_r(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_r(\varphi, \theta) + a_\varphi(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta) + a_\theta(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta)]. \quad (\text{V.113})$$

Dies führt für die Divergenz zu

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} a_\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) \right], \quad (\text{V.114})$$

und für die Rotation zu

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{a})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ -\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi) \right] \\(\nabla \times \mathbf{a})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} a_r \\(\nabla \times \mathbf{a})_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} a_r.\end{aligned}\tag{V.115}$$

## V.4 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Wir betrachten nun die **inhomogene Wellengleichung**

$$\square \psi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)\tag{V.116}$$

mit einer gegebenen Funktion  $f(\mathbf{x}, t)$ . Wir hatten bereits ebene Wellen als vollständiges System von Lösungen der homogenen Wellengleichung identifiziert. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man, indem man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung findet und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (d. h. der freien Wellengleichung) addiert:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_{\text{spez}}(\mathbf{x}, t) + \psi_{\text{homogen}}(\mathbf{x}, t).\tag{V.117}$$

Physikalisch ist die spezielle Lösung eine Welle, die von der Quelle  $f(\mathbf{x}, t)$  ausgeht. Die tatsächliche Lösung wird dann durch die Randbedingungen bestimmt.

Zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung  $\square \psi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$  benutzen wir wieder Greensche Funktionen, d. h. wir suchen eine Lösung von

$$\square G(\mathbf{x}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t).\tag{V.118}$$

Dies entspricht einer Quelle am Ort  $\mathbf{x}$ , die nur zur Zeit  $t = 0$  vorhanden ist. Zur Lösung dieser Gleichung machen wir einen Ansatz mit einem Fourier-Integral bzgl. der Zeit:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) d\omega.\tag{V.119}$$

Man bezeichnet in dieser Darstellung  $\tilde{G}(\mathbf{x}, t)$  als Spektralfunktion.<sup>6</sup> Setzen wir dies in (V.118) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \left( -\frac{\omega^2}{c^2} - \Delta \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \delta^{(3)}(\mathbf{x}),\tag{V.120}$$

worin wir auf der rechten Seite  $\delta(t)$  mittels (III.97) als Integral geschrieben haben. Hieraus folgt

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}).\tag{V.121}$$

<sup>6</sup>Im Zusammenhang mit Green-Funktionen bezeichnet man eine Funktion und ihre Spektralfunktion (bzw. Fouriertransformierte) oft mit demselben Symbol, wenn die Unterscheidung durch die Angabe des Arguments (hier  $t$  oder  $\omega$ ) klar ist.

Bis auf die Normierung finden wir also, daß es sich bei  $\tilde{G}$  für  $\omega = 0$  um die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung handelt, und für  $\omega \neq 0$  um die Greensche Funktion der **Helmholtz-Gleichung**. Die Lösung ist (siehe Übungen)

$$\tilde{G}_{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}}{r}. \quad (\text{V.122})$$

Die Rücktransformation von der  $\omega$ - zur  $t$ -Darstellung ergibt sich durch Einsetzen in (V.119):

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}}{r} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega(t \pm \frac{r}{c})} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \\ &= \frac{c}{4\pi r} \delta(r \pm ct). \end{aligned} \quad (\text{V.123})$$

Man nennt diese Lösungen **retardierte** bzw. **avancierte Green-Funktion**:

$$D_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (\text{V.124})$$

$$D_{\text{av}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad (\text{V.125})$$

Sie erfüllen

$$\square D_{\text{ret,av}}(\mathbf{x}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t). \quad (\text{V.126})$$

Wegen  $r = |\mathbf{x}|$  ist  $D_{\text{ret}} \neq 0$  nur für  $t > 0$ ,  $D_{\text{av}} \neq 0$  nur für  $t < 0$ . Wir können daher schreiben

$$D_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \theta(t) \quad (\text{V.127})$$

oder

$$D_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{2\pi} \delta(r^2 - c^2 t^2) \theta(t), \quad (\text{V.128})$$

und für  $t > 0$  ist

$$D_{\text{ret}} = -c^2 D \quad (\text{V.129})$$

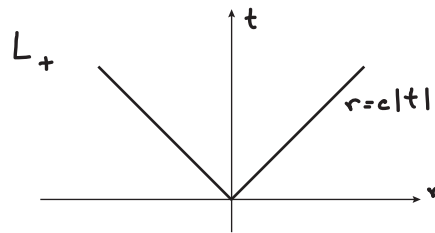
mit  $D$  aus (V.95).

Die Tatsache, daß wir verschiedene spezielle Lösungen der inhomogenen Wellengleichung finden, ist nicht verwunderlich. Addiert man nämlich zu einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung, so erhält man wieder eine Lösung der inhomogenen Gleichung. In der Tat löst die Differenz der beiden obigen Lösungen die homogene Gleichung,

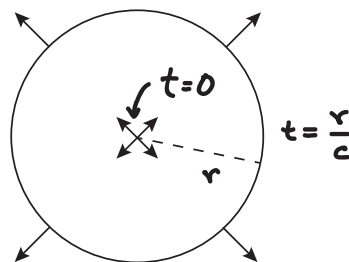
$$\square (D_{\text{ret}} - D_{\text{av}}) = 0. \quad (\text{V.130})$$

Die Formel (V.127) bedeutet, daß  $D_{\text{ret}} \neq 0$  nur auf dem **positiven Lichtkegel**  $L_+$  (also auf dem Hyperkegel im 4-dimensionalen  $(ct, \mathbf{x})$ -Raum) gilt, gegeben durch

$$r^2 = (ct)^2 \quad \text{mit } t \geq 0. \quad (\text{V.131})$$

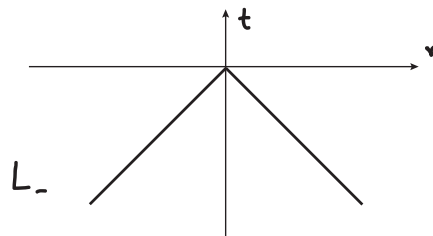


Wir können  $D_{\text{ret}}$  interpretieren als Kugelwellenpuls, der von  $t = 0$ ,  $\mathbf{x} = 0$  ausgeht und mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  nach außen läuft. Dies entspricht der Vorstellung, daß ein Feld durch eine Ladung erzeugt wird.

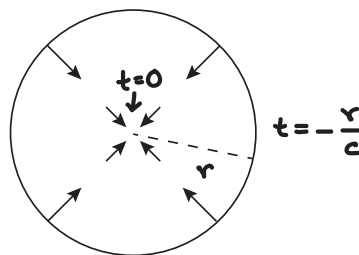


$D_{\text{av}}$  ist nur für  $t \leq 0$  von Null verschieden, genauer auf dem **negativen Lichtkegel**  $L_-$  gegeben durch

$$r^2 = (ct)^2 \quad \text{mit } t \leq 0. \quad (\text{V.132})$$



Daher können wir  $D_{\text{av}}$  interpretieren als einen kontrahierenden Kugelwellenpuls, der bei  $t = 0$  von der Quelle (besser: Senke) bei  $\mathbf{x} = 0$  absorbiert wird.



Mit der Greenschen Funktion erhält man die spezielle Lösung der inhomogenen Wellen-



gleichung (V.116) nach dem bekannten Schema:

$$\begin{aligned}
 \psi_{\text{spez}}(\mathbf{x}, t) &= \int D_{\text{ret}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') f(\mathbf{x}', t') dt' d^3x' \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}', t') dt' d^3x' \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'
 \end{aligned} \tag{V.133}$$

oder

$$\boxed{\psi_{\text{spez}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad \text{mit} \quad t'_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{V.134}$$

Die tatsächliche Lösung der inhomogenen Wellengleichung erhält man durch Addition der allgemeinen homogenen Lösung und durch Berücksichtigung der Randbedingungen.

Sowohl die retardierte als auch die avancierte Green-Funktion haben physikalische Bedeutung. (Dies ist auch in Einklang mit der Zeitumkehrinvarianz der Gleichungen der Elektrodynamik.) Welche Green-Funktion man im konkreten Fall wählt, hängt von der physikalischen Situation ab, die man beschreiben will und die die Randbedingungen festlegt. Die retardierte Green-Funktion ist die natürliche Wahl, wenn man die von vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen erzeugten Felder berechnen will. Die avancierte Green-Funktion ist aber ebenfalls wichtig, z. B. in der Quantenfeldtheorie.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß man  $D_{\text{ret}}$  und  $D_{\text{av}}$  auch in kovarianter Weise berechnen kann, indem man die Fourier-Darstellung (oder Spektraldarstellung) nicht nur bzgl.  $t$  sondern auch bzgl.  $\mathbf{x}$  wählt. Diese Herleitung benutzt Methoden der Funktionentheorie, insbesondere den Cauchyschen Integralsatz, und ist in den meisten Lehrbüchern zu finden.

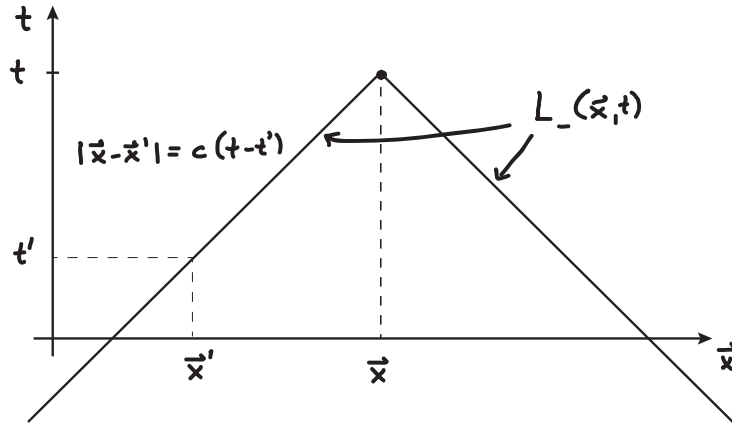
## V.5 Die retardierten Potentiale

Mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion können wir nun sofort die Lösung der Maxwell-Gleichungen bei vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  bestimmen. Wir wählen dazu die Lorenz-Eichung und finden für die elektromagnetischen Potentiale

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \text{homogene Lösung}} \tag{V.135}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \text{homogene Lösung} \\ \text{mit} \quad t'_{\text{ret}} &= t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \end{aligned}} \tag{V.136}$$

Die für  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  relevanten Zeiten und Orte der Ladungs- und Stromverteilungen liegen also auf dem Rückwärtslichtkegel (*nicht darin!*):



Von den Quellen gehen Wirkungen aus, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Nur Ursachen, die auf dem Rückwärtslichtkegel von  $(\mathbf{x}, t)$  liegen, tragen zu den elektromagnetischen Potentialen (und damit zu den Feldern) an diesem Raum-Zeit-Punkt bei, denn nur deren Wirkungen treffen am Ort  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  ein.

Wir können die elektromagnetischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  aus den Potentialen mittels  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  und  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  berechnen. Dabei treten durch die retardierte Zeitabhängigkeit innere Ableitungen nach dem Ort auf. Zum Beispiel ist (wir betrachten im folgenden nur die spezielle Lösung)

$$\begin{aligned} -\text{grad } \varphi &= - \int \text{grad}_x \frac{\rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) d^3x' + \frac{1}{c} \int \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^3x'. \end{aligned} \quad (\text{V.137})$$

Berechnet man noch  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  und  $\text{rot } \mathbf{A}$  (siehe Übungen), so findet man für die von  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  erzeugten elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \int \rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \\ &\quad + \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \right] \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &=: \mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}} + \mathbf{E}_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{V.138})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \int \left[ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &=: \mathbf{B}_{\text{Biot-Savart, ret}} + \mathbf{B}_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{V.139})$$

Gegebenenfalls sind noch homogene Lösungen zu addieren.

Der jeweils erste Term in diesen Lösungen,  $\mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}}$  bzw.  $\mathbf{B}_{\text{Biot-Savart, ret}}$ , ist die direkte Verallgemeinerung der Ergebnisse der Elektro- bzw. Magnetostatik, wobei aber  $\rho$  bzw.  $\mathbf{j}$  mit retardierten Argumenten zu nehmen ist. Die beiden letzten Terme,  $\mathbf{E}_{\text{Str}}$  und  $\mathbf{B}_{\text{Str}}$ , treten nur bei zeitabhängigen Ladungs- und Stromverteilungen auf! Ein wichtiger Unterschied besteht in der  $r$ -Abhängigkeit dieser Terme bei großen Abständen. Wir sehen, daß

$$|\mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}}|, |\mathbf{B}_{\text{Biot-Savart, ret}}| \sim \frac{1}{r^2} \quad (\text{V.140})$$

aber

$$|\mathbf{E}_{\text{Str}}|, |\mathbf{B}_{\text{Str}}| \sim \frac{1}{r}. \quad (\text{V.141})$$

Daher ist die *Reichweite* das Kriterium für die Unterscheidung zwischen dem **retardierten statischen Feld**, das an die Ladungen und Ströme gebunden bleibt, und dem **Strahlungsfeld**, das von den erzeugenden Ladungen und Strömen ins Unendliche wegfließt. Wir werden sehen, daß nur das Strahlungsfeld zu einem Energiestrom ins Unendliche führt. Bei großer Entfernung ist *nur* noch das Strahlungsfeld bemerkbar.

Es ist instruktiv, an dieser Stelle noch die Größenordnung des Unterschieds zwischen retardiertem statischem Feld und Strahlungsfeld abzuschätzen. Dazu betrachten wir den einfachen Fall einer schwingenden Ladungsverteilung:

$$\rho = \rho_0(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho\mathbf{v}, \quad (\text{V.142})$$

die auf ein Raumgebiet der Größe  $d$  beschränkt sei.  $|\mathbf{v}|$  ist dann von der Ordnung  $\mathcal{O}(d/T)$  mit der Schwingungsdauer  $T$ . Daher haben wir

$$|\rho| = |\rho_0|, \quad \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| = \omega |\rho_0|, \quad |\mathbf{j}| \approx |\rho|d \frac{\omega}{2\pi}, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right| \approx |\rho_0|d \frac{\omega^2}{2\pi}. \quad (\text{V.143})$$

Wir definieren  $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega}$  mit der Wellenlänge  $\lambda$  und weiter  $\tilde{d} = \frac{d}{2\pi}$ . Dann sind die Terme in  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  von folgender Größenordnung:

	retardierter statischer Term	Strahlungsterme
$ \mathbf{E} $	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{\omega}{cr} = \frac{1}{\tilde{\lambda}r} \quad \& \quad \frac{d\omega^2}{2\pi c^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \frac{\tilde{d}}{r}$
$ \mathbf{B} $	$\frac{d\omega}{2\pi c} \frac{1}{r^2} = \frac{\tilde{d}}{\tilde{\lambda}} \frac{1}{r^2}$	$\frac{d\omega^2}{2\pi c^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \frac{\tilde{d}}{r}$

bzw. relativ zueinander

	retardierter statischer Term	Strahlungsterme
$ \mathbf{E} / \mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}} $	1	$\frac{r}{\tilde{\lambda}} \quad \& \quad \frac{\tilde{d}}{\tilde{\lambda}^2} r$
$ \mathbf{B} / \mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}} $	$\frac{\tilde{d}}{\tilde{\lambda}}$	$\frac{\tilde{d}}{\tilde{\lambda}^2} r$
und beide für $d = \lambda$ :	1	$\frac{r}{\tilde{d}}$

Im Abstand 1m von einem Sender für cm-Wellen ist also das Strahlungsfeld ca. 100 mal so groß wie das verallgemeinerte statische Feld.

In der sog. **quasistationären Näherung** vernachlässigt man die Retardierungseffekte, d. h. man setzt

$$t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \approx t. \quad (\text{V.144})$$

Dies ist je nach den Abmessungen des untersuchten Problems möglich oder nicht. Eine Abschätzung für ein Beispiel soll das illustrieren. Für die Gültigkeit der Näherung ist nötig, daß die typische Schwingungszeit der Ladungsverteilung  $T$  groß gegen die typische Abmessung  $l$  der Ladungsverteilung geteilt durch die Lichtgeschwindigkeit ist,  $T \gg l/c$ . Beim (inzwischen kaum noch in Gebrauch befindlichen) analogen Telefon-Festnetz ist die Frequenz  $\nu \leq 3000$  Hz, und damit  $T \geq 3000^{-1}$  sec. Also ist  $cT \geq 10^7$  cm = 100 km. Für Ortsgespräche ist daher die quasistationäre Näherung gut, bei Ferngesprächen ist sie schlecht. (Die Näherung ist natürlich ohnehin nicht in die Leitungen eingebaut, dort breiten sich die Signale nach den korrekten Gleichungen ohne Näherung aus.) Heutige DSL-Leitungen werden mit einer Frequenz von ca. 1 MHz betrieben.

# Kapitel VI

## Spezielle Relativitätstheorie

Wie wir sehen werden, ist die Elektrodynamik nicht invariant unter den Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik. Die Betrachtung der Symmetrien der Elektrodynamik führt uns vielmehr zu der Erkenntnis, daß Raum und Zeit keine unabhängigen Größen sondern eng miteinander verknüpft sind. Dieser Zusammenhang und seine Folgen sind Gegenstand der speziellen Relativitätstheorie.

Die spezielle Relativitätstheorie macht Aussagen über die Struktur der Raumzeit. Um sie zu studieren, werden wir oft sog. Inertialsysteme betrachten, d. h. Bezugssysteme, die gegeneinander gleichförmig und geradlinig bewegt sind. Die spezielle Relativitätstheorie geht aber weit über die Betrachtung von Inertialsystemen hinaus.

### VI.1 Klassische Vorstellung von Raum und Zeit, Galilei-Transformationen

Nach **Isaac Newton** existieren ein 'absoluter Raum' und eine 'absolute Zeit', die universell sind:

'Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig, und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.'

Die Absolutheit des Raumes versuchte er unter anderem durch den *Newtonschen Eimer Versuch* zu belegen. Dieser macht die Beobachtung, daß in einem rotierenden, wassergefüllten Eimer die Wasseroberfläche eine Paraboloidform annimmt, während sie bei nicht rotierendem Eimer flach bleibt. Nach Newton ist dies hervorgerufen durch die Bewegung gegenüber dem absoluten Raum.

**Gottfried Wilhelm Leibniz** und vor Newton auch schon **René Descartes** argumentierten dagegen für einen relativen Raum. Der Raum sei nicht ein Ding an sich, sondern nur die relative Ordnung der Dinge beschreibend. Analog sei die Zeit nur die Ordnung der Aufeinanderfolge der Ereignisse.

**Immanuel Kant** wiederum argumentierte sogar noch grundlegender für einen absoluten Raum und eine absolute Zeit als Newton. Er sagte, daß Raum und Zeit 'Anschauungsformen a priori' seien. Einziger denkbarer Rahmen für die Naturbeschreibung seien der dreidimensionale euklidische Raum und die absolute Zeit.

**Ernst Mach** brachte gegen diese Vorstellungen den Einwand vor, daß es sich dabei um Begriffe ohne empirischen Wert handle. Ihm zufolge erfordert etwa die Bezeichnung

'gleichförmig' einen Vergleich. So ist der Eimerversuch nur ein Vergleich mit einem anderen Bezugssystem (Inertialsystem) und nicht mit dem Raum selber, in diesem Fall z. B. mit einem durch den Fixsternhimmel gegebenen Bezugssystem. Er folgerte, daß die absolute Zeit ein 'metaphysischer Begriff' sei.<sup>1</sup>

Unser modernes Verständnis von Raum und Zeit wurde wesentlich durch **Albert Einstein** (1905) geprägt. Danach sind Raum und Zeit Strukturen, die empirisch erforscht werden müssen. Insbesondere braucht man Meßvorschriften für Raum und Zeit. Diese erfordern physikalische Phänomene. Wir werden im folgenden genauer betrachten, wie dies geschieht. Zunächst wollen wir uns aber noch einmal die klassischen Vorstellungen vergegenwärtigen.

In der klassischen Mechanik postuliert man die Existenz *eines* sogenannten Inertialsystems, in dem die Newtonschen Axiome gelten. Für einen in diesem System ruhenden Beobachter sind Abstände durch starre Maßstäbe meßbar. Die Zeit wird durch einen periodischen Vorgang, z. B. durch einen Oszillator, gemessen. Es wird weiter angenommen, daß der Raum euklidisch ist. Die Synchronisation von Uhren an verschiedenen Orten ist dann durch starre Maßstäbe möglich. (Durch das Ruckeln an einem solchen starren Maßstab kann ein Signal *instantan* an das andere Ende des Maßstabs übertragen werden.) Problem ist allerdings, daß starre Maßstäbe zwar in der klassischen Mechanik, aber nicht in der Realität existieren. Ein Signal breitet sich nämlich in realen Maßstäben durch Schallwellen aus, die eine *endliche* Geschwindigkeit haben.

Man findet in der klassischen Mechanik: Jeder Beobachter, der zum ersten Beobachter gleichförmig geradlinig bewegt ist, findet dieselben Naturgesetze. Die klassische Mechanik ist daher invariant unter **Galilei-Transformationen**

$$\begin{aligned} t' &= t + \tau \\ x'_i &= -v_i t + R_{ij} x_j + a_i, \end{aligned} \tag{VI.1}$$

worin  $\tau$ ,  $v_i$  und  $a_i$  Konstanten sind und  $(R_{ij})$  eine orthogonale  $3 \times 3$  Matrix ist ( $RR^T = \mathbf{1}$ ). Diese Transformationen bilden eine 10-parametrische Gruppe, die **Galilei-Gruppe**. (Dabei sind beliebige Drehungen durch 3 Parameter charakterisiert, etwa durch drei Euler-Winkel.) Die Bewegungsgleichungen, z. B. die Gravitationskraft, sind invariant unter den Galilei-Transformationen.

Die Invarianz unter Galilei-Transformationen drückt aus:

- die Homogenität der Zeit ( $\tau$ ),
- die Homogenität des Raums ( $a_i$ ),
- die Isotropie des Raums ( $R_{ij}$ ),
- die Äquivalenz gleichförmig geradlinig zueinander bewegter Beobachter ( $v_i$ ).

Der letzte Punkt motiviert die besondere Bedeutung von **Inertialsystemen**, also solchen Systemen, die gleichförmig geradlinig zueinander bewegt sind. Die Äquivalenz dieser Systeme formuliert man als (**spezielles**) **Relativitätsprinzip**:

Alle Bezugssysteme, die sich relativ zueinander geradlinig gleichförmig (d. h. mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ ) bewegen, sind äquivalent.

<sup>1</sup>Diese Bezeichnung war von ihm sehr negativ gemeint.

Messungen von Zeit und Ort sind nur *relativ* zu einem Bezugssystem möglich. Gleichzeitigkeit ist ein *absoluter* Begriff, ebenso räumliche Distanzen zweier Punktereignisse, die zur selben Zeit stattfinden.

Beschleunigte Bezugssysteme sind Inertialsystemen *nicht* äquivalent. In ihnen treten **Scheinkräfte** auf.

## VI.2 Relativität und Elektrodynamik, Einsteins Postulate

Man erkennt leicht, daß die Maxwell-Gleichungen nicht invariant unter Galilei-Transformationen sind. Betrachten wir z. B. ebene Wellen (die Lösungen der freien Maxwell-Gleichungen sind),

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad c|\mathbf{k}| = \omega, \quad (\text{VI.2})$$

und wenden darauf die Transformation

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \quad (\text{VI.3})$$

an, so erhalten wir zwar wieder eine ebene Welle,

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t-\omega t')} = e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'-\omega' t')} \quad (\text{VI.4})$$

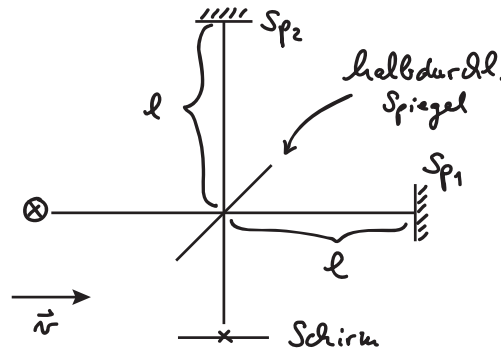
mit  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad \omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}.$

Es ist aber im allgemeinen  $\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \neq c|\mathbf{k}'|$ , und damit ist die transformierte Welle keine Lösung der freien Maxwell-Gleichungen.

Falls sich Maßstäbe und Uhren wie in der klassischen Mechanik verhalten, wären damit die Gesetze der Elektrodynamik verschieden in zueinander bewegten Inertialsystemen.

In dieser Situation gibt es folgende drei Möglichkeiten:

- Die Maxwell-Gleichungen könnten inkorrekt sein. – Das ist unwahrscheinlich, da sie experimentell sehr gut überprüft sind.
- Die Galilei-Invarianz gilt für die klassische Mechanik, aber die Elektrodynamik hat ein bevorzugtes Bezugssystem, in dem die Maxwell-Gleichungen gelten: das Ruhesystem des **Äthers**. Dies wäre in Analogie zu Schallwellen, die von der Bewegung des Mediums abhängen, so daß die Wellengleichung für Schall nur im Ruhesystem des Mediums gilt. Hier wäre das Medium der Äther. – Die experimentelle Suche nach dem Äther blieb aber erfolglos! So vergleicht man z. B. im Michelson-Morley-Experiment die Lichtgeschwindigkeit parallel und senkrecht zur Erdbewegung, und damit zur Bewegung relativ zum angenommenen Äther. (Die Erde bewegt sich mit ca. 30 km/sec relativ zur Sonne und mit ca. 200 km/sec relativ zum Zentrum der Galaxie.)



In diesem Aufbau beträgt nach klassischen Überlegungen die Laufzeit des Lichts zum Spiegel 1 und zurück

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \quad (\text{VI.5})$$

und zum Spiegel 2 und zurück

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) \quad (\text{VI.6})$$

Es ergibt sich also ein Laufzeitunterschied durch die Bewegung

$$t_1 - t_2 = \frac{lv^2}{c^3}, \quad (\text{VI.7})$$

Der Effekt sollte also mit der Größe  $l$  des Interferometers zunehmen. Bei Drehung des Apparats um 90 Grad wäre eine Veränderung des Interferenzmusters auf dem Schirm zu erwarten, da sich die Rolle der beiden Arme des Interferometers vertauscht, entsprechend einem betraglich gleichen, aber negativen Laufzeitunterschieds  $t_1 - t_2$ . Es wurde in entsprechenden Experimenten intensiv nach Effekten des Äthers gesucht, allerdings kein Hinweis auf seine Existenz gefunden.<sup>2</sup>

- Es gilt ein anderes Relativitätsprinzip für die klassische Mechanik und Elektrodynamik, das nicht auf Galilei-Invarianz beruht. Dies würde erfordern, die Gesetze der Mechanik zu ändern (und entsprechend experimentell zu überprüfen). – Diese Möglichkeit wurde von Albert Einstein ausgearbeitet und hat sich als die richtige erwiesen.

Einstein formuliert in seiner grundlegenden Arbeit<sup>3</sup> von 1905 die folgenden zwei Postulate:<sup>4</sup>

<sup>2</sup>Auch modifizierte Äthertheorien, die eine 'Mitführung' des Äthers mit der Erddrehung annehmen, sind inzwischen experimentell sicher ausgeschlossen.

<sup>3</sup>Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17** (1905) 891

<sup>4</sup>Im originalen Wortlaut: (Die Lichtgeschwindigkeit ist in der Originalarbeit mit  $V$  bezeichnet.)

1. Die Gesetze nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystem diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im 'ruhenden' Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit  $V$ , unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei 'Zeitdauer' im Sinn der [... vorher gegebenen] Definition aufzufassen ist.



**1. Relativitätsprinzip:**

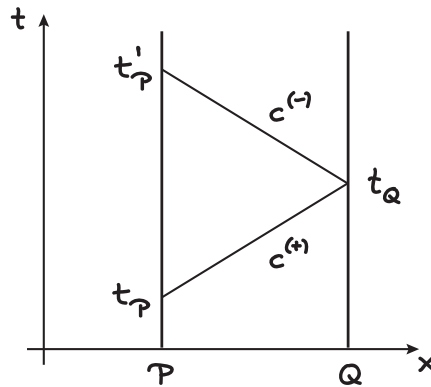
Die physikalischen Gesetze sind unabhängig von der gleichförmigen Bewegung des Systems als Ganzem.

**2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:**

Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die gleiche und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.

Bevor wir uns mit den Konsequenzen der Postulate befassen, müssen wir noch die **Synchronisation von Uhren** nach Einstein behandeln. Bei diesem Verfahren ruht ein Beobachter bezüglich des Fixsternhimmels. Er kann den Raum durch *ruhende* (reale) Maßstäbe ausmessen. Unter der Annahme, daß der Raum euklidisch ist, ergeben sich dann die kartesischen Koordinaten der Raumpunkte. Weiter seien an verschiedenen Punkten Uhren angebracht, die ruhen. Der Transport von Uhren ist keine geeignete Möglichkeit zur Synchronisation, da sie dabei beschleunigt würden, was Einfluß auf die angezeigte Zeit hätte. Auch eine Synchronisation mit starren Stäben ist nicht möglich, da diese in der Realität nicht existieren. Als geeignete Methode bietet sich stattdessen die Synchronisation mit Lichtsignalen an.

Hierzu betrachten wir zwei Uhren an den Punkten  $P$  und  $Q$ , die 'P-Zeit' und 'Q-Zeit' anzeigen. Man legt per Definition fest, daß ein Lichtsignal von  $P$  nach  $Q$  gleich lange braucht wie umgekehrt. Die Lichtgeschwindigkeit auf dem Hinweg  $c^{(+)}$  soll also gleich groß sein wie die auf dem Rückweg  $c^{(-)}$ .<sup>5</sup> Man sendet dann ein Lichtsignal von  $P$  nach  $Q$ , wo es reflektiert werde und wieder nach  $P$  gelange. Dies geschehe zu den Zeitpunkten  $t_P$ ,  $t_Q$  und  $t'_P$ .



Dabei werden  $t_P$  und  $t'_P$  auf der Uhr bei  $P$  gemessen,  $t_Q$  auf der Uhr bei  $Q$ . Die Uhren sollen dann *per Definition* synchron sein, wenn

$$t_Q = t_P + \frac{1}{2}(t'_P - t_P). \quad (\text{VI.8})$$

Auf diese Weise ist auch die widerspruchsfreie Synchronisation von mehreren Uhren an verschiedenen Punkten möglich. Die (Zweiwege-)Lichtgeschwindigkeit ist dann

$$c = \frac{2 \overline{PQ}}{t'_P - t_P}, \quad (\text{VI.9})$$

<sup>5</sup>Die sogenannte Einwege-Lichtgeschwindigkeit kann nur gemessen werden, wenn Uhren an den verschiedenen Punkten auf andere Art synchronisiert sind als durch Lichtsignale. Daher hängt die Einwege-Lichtgeschwindigkeit von der Art der Synchronisation ab und ist als physikalische Observable von zweifelhaftem Wert.

was mit der obigen Definition  $c^{(+)} = c^{(-)} = \pm c$  entspricht.

### VI.3 Spezielle Lorentz-Transformationen

Wir suchen nun die Transformationsgesetze (analog den Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik) zwischen zwei gleichförmig geradlinig zueinander bewegten Bezugssystemen, d. h. zwischen zwei Inertialsystemen. Die Transformationsgesetze sollen jetzt mit den obigen Postulaten in Einklang sein.

Dazu betrachten wir zwei Inertialsysteme I und I'. I' sei mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  relativ zu I bewegt. Die Ursprünge von I und I' sollen bei  $t = 0$ ,  $t' = 0$  übereinstimmen. Bei  $\mathbf{x} = 0$ ,  $t = 0$  sei ein Lichtblitz erzeugt. Seine Wellenfront wird also beschrieben durch

$$\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = 0, \quad t > 0 \quad (\text{VI.10})$$

im ruhenden System I. Das ist gerade der **Vorwärtslichtkegel**  $L_+$ . Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt, daß die Lichtwelle in I' *dieselbe* Form haben muß (entgegen der klassischen Erwartung):

$$\mathbf{x}'^2 - c^2 t'^2 = 0, \quad t' > 0. \quad (\text{VI.11})$$

Dazu ist es notwendig, daß auch die Zeit transformiert wird, d. h. im allgemeinen  $t' \neq t$ . (Dies impliziert auch, den Begriff der Gleichzeitigkeit aufzugeben, s. u.) Bei der Transformation  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ ,  $t \rightarrow t'$  muß gelten:

$$\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (\text{VI.12})$$

Ein Beispiel für eine solche Transformation ist die **spezielle Lorentz-Transformation**, auch **Lorentz-Boost** genannt.<sup>6</sup> Wird ein solcher Boost z. B. in  $x$ -Richtung durchgeführt mit der Geschwindigkeit  $v$ , so ist das Transformationsgesetz

$$\begin{array}{l} y' = y \\ z' = z \\ x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{array} \quad (\text{VI.13})$$

worin

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (\text{VI.14})$$

und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{VI.15})$$

Man kann allgemein zeigen, daß die Transformationen zwischen zwei Inertialsystemen *linear* in  $x_i$  und  $t$  sein müssen, damit lineare Bewegungen in lineare Bewegungen übergehen.

<sup>6</sup>Solche Transformationen wurden bereits vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie untersucht, unter anderem von W. Vogt (1887), H. A. Lorentz (1904) und H. Poincaré (1905).

Führen wir die **Rapidität**  $\eta$  ein mit

$$\tanh \eta = \frac{v}{c} = \beta, \quad (\text{VI.16})$$

d. h.

$$\eta = \text{Artanh} \frac{v}{c} \quad (\text{VI.17})$$

mit

$$\begin{aligned} \sinh \eta &= \gamma \frac{v}{c} \\ \cosh \eta &= \gamma, \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

so ist

$$\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = 1. \quad (\text{VI.19})$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) = + \cosh \eta ct - \sinh \eta x \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) = - \sinh \eta ct + \cosh \eta x \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

Die spezielle Lorentz-Transformation hat offenbar Ähnlichkeit mit einer Drehung, bzw. ist eine verallgemeinerte Drehung.

Die Beziehung  $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$  führt zu

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 &= \cosh^2 \eta c^2 t^2 - 2 \cosh \eta \sinh \eta ct x + \sinh^2 \eta x^2 \\ &\quad - \sinh^2 \eta c^2 t^2 + 2 \cosh \eta \sinh \eta ct x - \cosh^2 \eta x^2 - y^2 - z^2 \\ &= (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) c^2 t^2 - (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) x^2 - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - \mathbf{x}^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

## VI.4 Relativistische Notation, der Minkowski-Raum

Wie wir gesehen haben, lassen sich spezielle Lorentz-Transformationen, die den Vorwärtslichtkegel invariant lassen, als verallgemeinerte Drehungen schreiben, bei denen Zeit- und Ortskoordinaten ineinander gedreht werden. Es lohnt sich daher,  $ct$  und  $\mathbf{x}$  zu einer Größe zusammenzufassen.

Wir beschreiben jeden **Raum-Zeit-Punkt** (oder **Weltpunkt**) durch einen **Vierervektor** (oder 4-Vektor), indem wir  $ct$  und  $\mathbf{x}$  zusammenfassen. Wir schreiben

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (\text{VI.23})$$

und nennen

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.24})$$

einen **kontravarianten** Vierervektor (oder:  $x^\mu$  die kontravarianten Komponenten des Vierervektors  $x$ ). Weiter definieren wir den **kovarianten** Vierervektor

$$(x_\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.25})$$

Mit dem **metrischen Tensor**<sup>7</sup>

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.26})$$

ist

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad \text{bzw.} \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (\text{VI.27})$$

Auf dem Raum der Vierervektoren definiert man das vierdimensionale oder **invariante Skalarprodukt**

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = x_\mu y^\mu. \quad (\text{VI.28})$$

Den Raum der Vierervektoren ( $x^\mu$ ) mit der **Minkowski-Metrik**  $g_{\mu\nu}$  bzw. dem von ihr induzierten Skalarprodukt<sup>8</sup> nennt man den **Minkowski-Raum**.

Man beachte, daß

$$x \cdot y = c^2 t_x t_y - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (\text{VI.29})$$

ein *indefinites* Skalarprodukt ist, d. h.  $x \cdot y$  kann positiv, negativ oder Null sein.

Die **invariante Länge** eines 4-Vektors (oder sein 4-dim. Abstand oder **invarianter Abstand** vom Ursprung) ist definiert durch

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2. \quad (\text{VI.30})$$

Oft wird auch  $\sqrt{x^2}$  als invariante Länge bezeichnet.

Mit dieser Notation wird die Gleichung für die Wellenfront eines Lichtsignals ausgesandt bei  $t = 0$  und  $\mathbf{x} = 0$

$$x^2 = 0. \quad (\text{VI.31})$$

Vektoren ( $x^\mu$ ) mit  $x^2 = 0$  bezeichnet man daher als **lichtartig**. Vektoren mit  $x^2 < 0$  nennt man **raumartig**, solche mit  $x^2 > 0$  **zeitartig**. Entsprechend können auch die Abstände zwischen zwei Punkten,

$$s^2 = (x - y)^2 = c^2 (t_x - t_y)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \quad (\text{VI.32})$$

<sup>7</sup>Dieser wird im Kontext der allgemeinen Relativitätstheorie die 'flache Metrik' genannt.

<sup>8</sup>In der mathematisch orientierten Literatur wird oft auch eine Metrik und damit ein Skalarprodukt mit umgekehrten Vorzeichen verwendet:  $-$  für die Zeitkomponente,  $+$  für die räumlichen Komponenten.

größer, kleiner, oder gleich Null sein.

Es ist üblich, Indizes, die von 0 bis 3 laufen, mit griechischen Buchstaben ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ ) zu bezeichnen und solche, die von 1 bis 3 laufen, mit lateinischen Buchstaben ( $i, j, k, \dots$ ), z. B.

$$x^2 = x^\mu x_\mu = x^0 x_0 - x^i x^i. \quad (\text{VI.33})$$

Wir definieren das 4-dimensionale Kronecker- $\delta$  durch

$$\delta^\mu{}_\nu \quad \text{oder} \quad \delta_\mu{}^\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{VI.34})$$

Weiter können wir für einen allgemeinen Tensor Indizes heben und senken mittels  $g_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} C^{\dots\mu\dots} &= g^{\mu\nu} C^{\dots\nu\dots} \\ C_{\dots\mu\dots} &= g_{\mu\nu} C_{\dots\nu\dots} \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

Man sieht, daß

$$\begin{aligned} g_\mu{}^\nu &= g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu{}^\nu \\ g^\mu{}_\nu &= g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Lineare Transformationen von Weltvektoren können wir schreiben als

$$x' = Ax, \quad (\text{VI.37})$$

wobei  $A$  eine (reelle)  $4 \times 4$  Matrix ist. In Komponenten:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= A^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= A_\mu{}^\nu x_\nu. \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

Man findet

$$A_\mu{}^\nu x_\nu = x'_\mu = g_{\mu\rho} x'^\rho = g_{\mu\rho} A^\rho{}_\sigma x^\sigma = g_{\mu\rho} A^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu} x_\nu, \quad (\text{VI.39})$$

woraus man abliest

$$A_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} A^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu}, \quad (\text{VI.40})$$

wie auch aus der allgemeinen Regel für das Heben und Senken von Indizes zu erwarten war. Analog gilt

$$A^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} A_\rho{}^\sigma g_{\sigma\nu}. \quad (\text{VI.41})$$

Für die spezielle Lorentztransformation (VI.13) werden die 0- und 1-Komponenten der Vierernotation

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad (\text{VI.42})$$

und aus  $y' = y, z' = z$  wir natürlich  $x'^2 = x^2, x'^3 = x^3$ . Man kann die Transformation auch nach  $x^0$  und  $x^1$  auflösen und erhält damit unter Verwendung von (VI.15) die inverse Transformation

$$x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1), \quad x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0). \quad (\text{VI.43})$$

Man erkennt auch hier, daß die Ursprünge ( $\mathbf{x} = 0$  bzw.  $\mathbf{x}' = 0$ ) der zugehörigen Inertialsysteme zu den Zeitpunkten  $t = 0$  bzw.  $t' = 0$  zusammentreffen, wie bereits in VI.3 diskutiert.

## VI.5 Geometrie des Minkowski-Raums

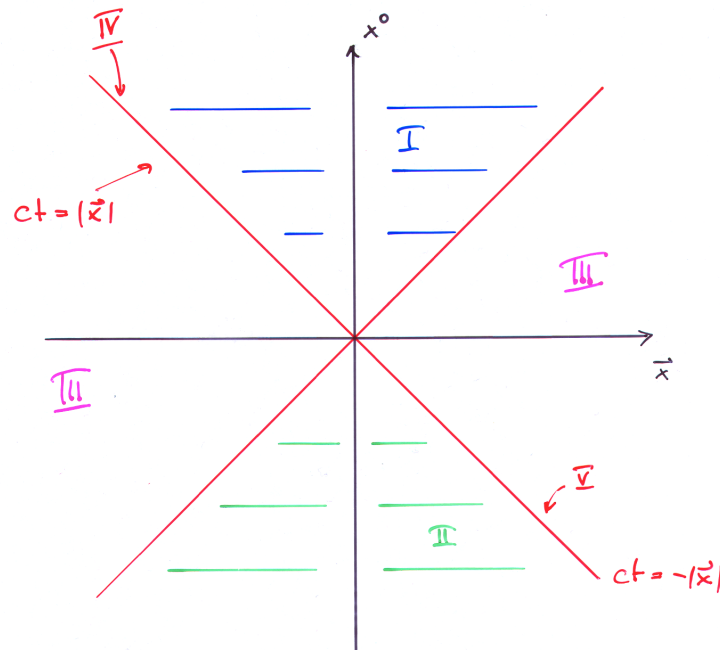
### VI.5.a Kausalität und Minkowski-Diagramme

Eine wichtige Folgerung des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist, daß  $c$  Grenzgeschwindigkeit für physikalische Prozesse ist. Dies ist sichtbar z. B. daran, daß Energie und Impuls eines Teilchens für  $v \rightarrow c$  unendlich groß werden (s. später). Nur masselose Teilchen können die Geschwindigkeit  $c$  erreichen, haben aber auch immer diese Geschwindigkeit.

Wir wollen nun zeigen: physikalische Wirkungen können sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Der Grund dafür ist nicht dynamisch, sondern liegt in der relativistischen Struktur der Raumzeit. Wir veranschaulichen die verschiedenen Bereiche, die den Fällen

$$x^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2 \begin{cases} > 0 & \text{zeitartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \\ = 0 & \text{lichtartig} \end{cases} \quad (\text{VI.44})$$

entsprechen, in einem Diagramm:



Darin sind die Bereiche I-V gegeben durch

I:	$x^2 > 0, x^0 > 0$	Zukunft
II:	$x^2 > 0, x^0 < 0$	Vergangenheit
III:	$x^2 < 0$	
IV:	$x^2 = 0, x^0 > 0$	Zukunft
V:	$x^2 = 0, x^0 < 0$	Vergangenheit

Wie wir sehen werden, bleiben diese Bereiche jeweils invariant unter eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen.

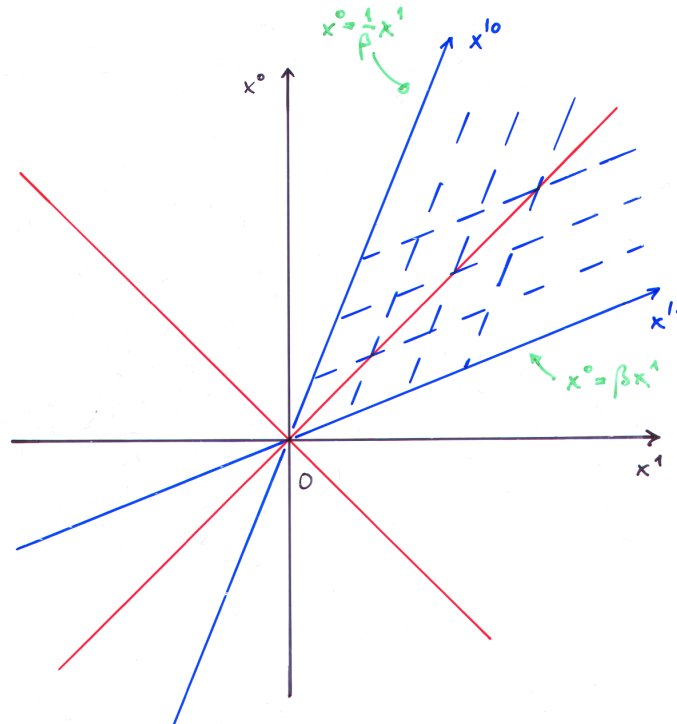
Die zeit- und lichtartigen Bereiche zerfallen jeweils in zwei Teile: die Zukunft und die Vergangenheit. Der raumartige Bereich ist dagegen zusammenhängend. Die räumlichen und die zeitliche Dimensionen unterscheiden sich also!

Bereich IV ist gerade der Vorwärtslichtkegel  $L_+$ , Bereich V der Rückwärtslichtkegel  $L_-$ .

Im nicht-relativistischen Grenzfall, d. h. für  $c \rightarrow \infty$ , würde der Bereich III auf die Hyperebene  $t = 0$  schrumpfen. Nur gleichzeitige Weltpunkte wären dann noch raumartig. Für  $c < \infty$  gibt es dagegen für *jeden* Weltpunkt aus III ein Inertialsystem, in dem der Punkt mit dem Ursprung gleichzeitig ist. Um dies zu sehen, interpretieren wir die spezielle Lorentz-Transformation (VI.42) geometrisch. An

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad (\text{VI.45})$$

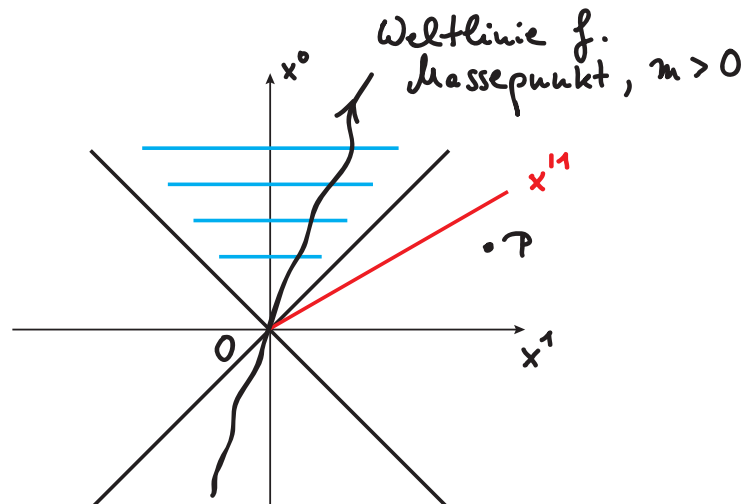
erkennen wir: Die  $x'^0$ - und  $x'^1$ -Achsen bilden im  $x^0, x^1$ -Koordinatensystem eine spitzen (stumpfen) Winkel, falls  $\beta > 0$  ( $\beta < 0$ ), der durch den Lichtkegel halbiert wird. Denn: die  $x'^0$ -Achse ist durch  $x'^1 = 0$  definiert, erfüllt also  $x^0 = \frac{1}{\beta} x^1$ . Analog ist die  $x'^1$ -Achse durch  $x'^0 = 0$  definiert, erfüllt also  $x^0 = \beta x^1$ . Damit erhalten wir folgendes **Minkowski-Diagramm**, das die Achsen des transformierten Systems im ursprünglichen System darstellt.



Variiert  $\beta$ ,  $-1 < \beta < 1$ , so überstreicht die  $x'^1$ -Achse den gesamten raumartigen Bereich III und gleichzeitig die  $x'^0$ -Achse den zeitartigen Bereich. Man kann daher für jeden Punkt  $P \in \text{III}$  ein  $\beta$  finden, so daß  $P$  und  $O$  auf der  $x'^1$ -Achse liegen und damit dieselbe Zeitkoordinate  $x'^0$  haben. Gleichzeitige Ereignisse im  $'$ -System liegen auf Parallelen zur  $x'^1$ -Achse. Analog liegen Ereignisse am selben Ort im  $'$ -System auf Parallelen zur  $x'^0$ -Achse.

Damit können wir nun herleiten:

Alle von einem Punkt ausgehenden *physikalischen* Wirkungen können sich nur innerhalb des Vorwärtslichtkegels oder auf seinem Rand ausbreiten.



Nehmen wir nämlich an, daß eine von  $O$  ausgehende 'punktförmige' Wirkung (oder ein Signal) einen im raumartigen Bereich gelegenen Raum-Zeit-Punkt  $P$  erreicht, so finden wir nach obigen Überlegungen folgendes. Es gibt ein Inertialsystem, in dem  $P$  eine *negative* Zeitkoordinate hat, während  $O$  die Zeitkoordinate  $x^0 = 0$  hat. Damit würde in diesem System  $I'$  das Signal bei  $P$  eintreffen, *bevor* es bei  $O$  losgeschickt ist. Dies wäre eine Verletzung der **makroskopischen Kausalität**, die besagt, daß eine physikalische Wirkung immer zeitlich später oder allenfalls gleichzeitig mit der Ursache auftritt. Daraus folgt, daß die Lichtgeschwindigkeit die obere Grenze für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von physikalischen Wirkungen oder Signalen ist.<sup>9</sup>

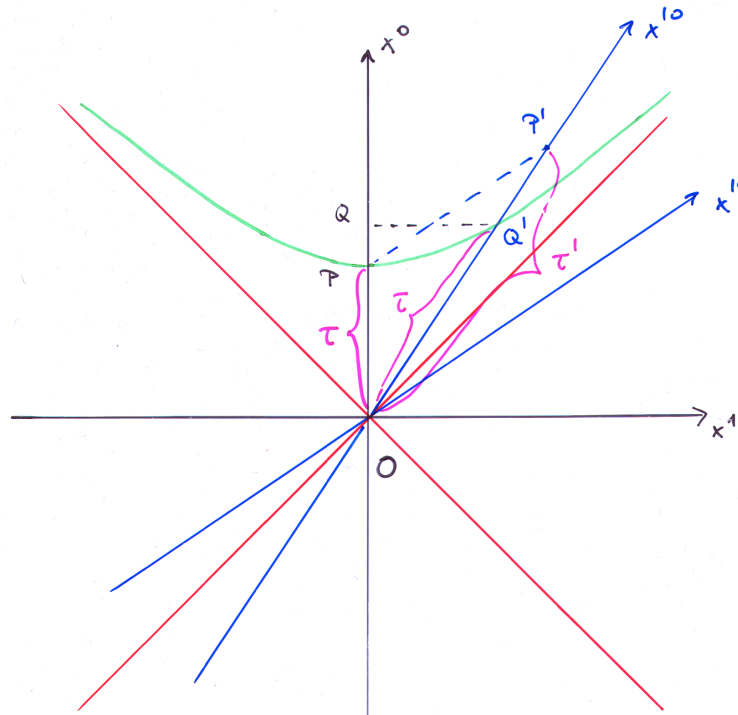
■ Liegen zwei Ereignisse (Raum-Zeit-Punkte) raumartig zueinander, so gibt es Inertialsysteme, in denen sie in *verschiedener Reihenfolge* ablaufen!

### VI.5.b Zeitdilatation

Wir wollen als Beispiel ein radioaktives Teilchen betrachten, etwa ein Myon, das zerfällt:  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ . Es ruhe im System  $I$  und beschreibe die Weltlinie  $OP$ . Es zerfalle bei  $P$  nach einer Zeit  $\tau$ .

<sup>9</sup>Formal treten durchaus Überlichtgeschwindigkeiten auf, z.B. in der Phasengeschwindigkeit von Wellen, bei der Bewegung von Schatten in großer Entfernung etc. Dabei können aber keine Signale mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden.





Im bewegten System  $I'$  hat  $P$  die Zeitkoordinate  $\tau'(P')$ , die man durch paralleles Verbinden von  $P$  zur  $x'^1$ -Achse erhält. Um die Zeit im System  $I'$  zu messen, übertragen wir die Zeiteinheit auf dieses System  $I'$ . Dazu betrachten wir den invarianten Ausdruck

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = \tau^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2. \quad (\text{VI.46})$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel. Diese Hyperbel überträgt den Zeitmaßstab, denn für  $x^1 = 0$  ist gemäß dieser Relation  $x^0 = \tau$ , und analog ist auch für  $x'^1 = 0$  gerade  $x'^0 = \tau$ .

Man sieht nun geometrisch, daß  $\tau' > \tau$ . Quantitativ erhalten wir

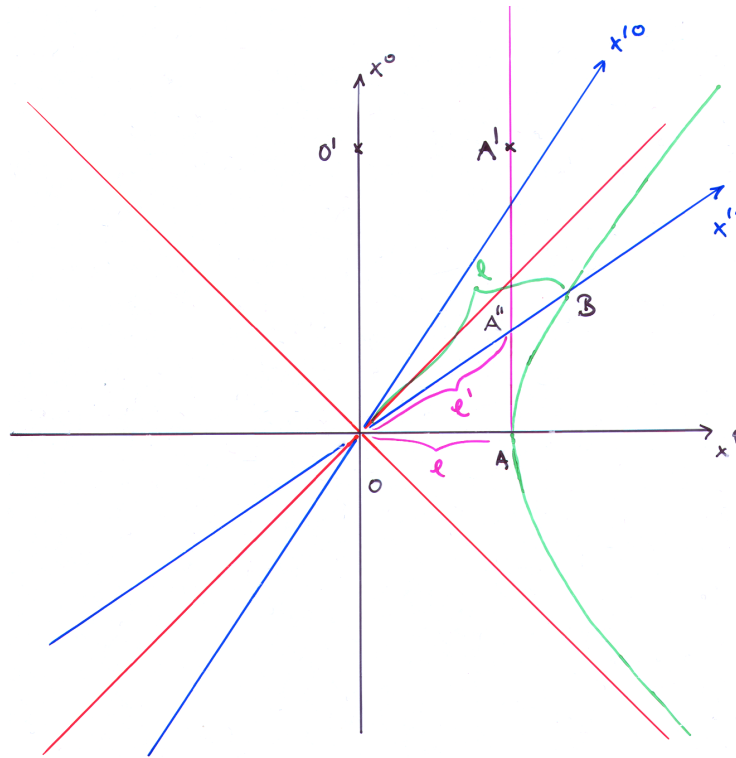
$$\begin{aligned} x^1 = 0, \quad x^0 = \tau, \quad x'^0 = \tau' \\ \implies \tau' = \gamma\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tau. \end{aligned} \quad (\text{VI.47})$$

Die Lebensdauer des bewegten Teilchens ist um den Faktor  $\gamma$  größer! Dies wird als relativistische **Zeitdilatation** bezeichnet.

Umgekehrt findet man: ruht das Myon in  $I'$ , so beschreibt es die Weltlinie  $OQ'$ . Von  $I$  aus gesehen, ist die Zeitkoordinate des Zerfalls die von  $Q$ , erhalten aus einer Parallele zur  $x^1$ -Achse von  $Q'$  aus. Dieser Punkt entspricht wieder  $\tau' > \tau$ . Es ist also, in Übereinstimmung mit dem Relativitätsprinzip, kein System vor dem anderen ausgezeichnet.

### VI.5.c Längenkontraktion

Ein Maßstab der Länge  $l$  ruhe im System  $I$ . Seine Endpunkte bewegen sich dann auf den Weltlinien  $OO'$  und  $AA'$  in folgendem Minkowski-Diagramm.



In  $I'$  ist die Länge des Maßstabs der Abstand zweier Weltpunkte auf  $OO'$  und  $AA'$ , die in  $I'$  gleichzeitig sind. Dies sind z. B.  $O$  und  $A''$ . Die Länge des Maßstabs in  $I'$  ist dann  $l' = \overline{OA''}$ .

Um diese Längen zu vergleichen, übertragen wir die Länge  $l$  von  $I$  nach  $I'$ . Dazu beobachten wir, daß

$$-l^2 = x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2, \quad (\text{VI.48})$$

was wieder die Gleichung einer Hyperbel darstellt. Daher hat  $B$  von  $O$  in  $I'$  den Abstand  $x'^1 = l$ . Wir sehen, daß  $l' < l$ . Quantitativ erhalten wir aus der inversen Lorentz-Transformation

$$x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0) \quad (\text{VI.49})$$

mit  $x'^0 = 0$ ,  $x'^1 = l'$  und  $x^1 = l$

$$l' = \frac{1}{\gamma} l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l. \quad (\text{VI.50})$$

Dies bezeichnet man als relativistische **Längenkontraktion**. Wie wir gerade gesehen haben, beruht sie auf der Relativität der Gleichzeitigkeit.

Man beachte, daß sich die Längenkontraktion auf die in verschiedenen Systemen gemessene Länge bezieht, nicht auf die optische Erscheinung eines bewegten Objekts. Um die optische Erscheinung eines bewegten Objekts zu ermitteln, muß man die endliche Laufzeit des Lichts von verschiedenen Punkten des Objekts zum ruhenden Beobachter einbeziehen. Selbst schnell (nahe der Lichtgeschwindigkeit) bewegte Kugeln erscheinen optisch als Kugeln, jedoch gedreht und mit verzerrter Oberfläche. Allgemeine Objekte erscheinen optisch als verzerrt und gedreht.

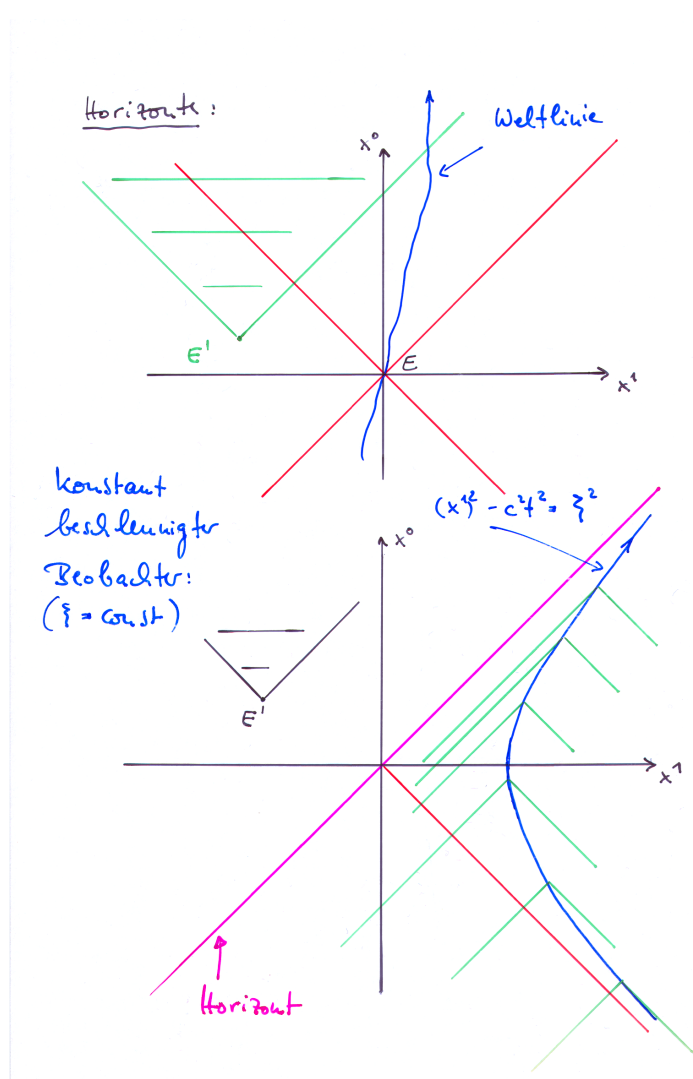
### VI.5.d Addition von Geschwindigkeiten

Bei zwei aufeinanderfolgenden speziellen Lorentz-Transformationen sind nicht die Geschwindigkeiten additiv (wie bei Galilei-Transformationen), sondern die Rapiditäten. Durch Anwendung zweier spezieller Lorentz-Transformationen mit Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  in derselben Richtung erhält man daher das Additionstheorem für Geschwindigkeiten (s. Übungen):

$$v_{\text{ges}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c. \tag{VI.51}$$

### VI.5.e Horizonte

Zunächst stellen wir fest, daß man als Beobachter durch Warten auch etwas über raumartig gelegene Ereignisse erfahren kann. Dies trifft ebenfalls zu, wenn sich der Beobachter mit konstanter oder beschränkter Geschwindigkeit  $v < c$  bewegt, wie man auch leicht an einem Diagramm erkennt:



Für einen beschleunigten Beobachter  $\tilde{B}$  gilt dies nicht notwendig. Betrachten wir z. B. einen konstant beschleunigten Beobachter mit der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = \xi^2 = \text{const.}, \quad (\text{VI.52})$$

dessen Weltlinie eine Hyperbel ist, siehe obiges Diagramm.  $\tilde{B}$  kann nur Signale von oder aus dem Inneren seines jeweiligen Rückwärtslichtkegels erhalten. Wie man leicht sieht, wird er ein vom Punkt  $E'$  ausgehendes Signal nie erhalten können: Der Vorwärtslichtkegel von  $E'$  hat keine Schnittmenge mit irgendeinem der Rückwärtslichtkegel entlang der Weltlinie von  $\tilde{B}$ . Es gibt daher für  $\tilde{B}$  ein Gebiet, aus dem er nie Informationen erhalten kann. Dessen Grenze bezeichnet man als **Horizont**. Horizonte spielen in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle, dort auch in anderen Zusammenhängen, etwa bei schwarzen Löchern.

Man kann sogar zeigen, daß sich zwei beschleunigte Beobachter bei geeigneten Bedingungen beliebig nahe kommen können, ohne sich gegenseitig zu bemerken (s. Übungen).

## VI.6 Lorentz- und Poincaré-Transformationen

Wie wir gesehen hatten, folgt aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für die Transformation von einem Inertialsystem  $I$  zu einem anderen  $I'$ : wenn  $\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = 0$ , so ist auch  $\mathbf{x}'^2 - c^2 t'^2 = 0$ , oder in Vierer-Schreibweise: aus  $x^2 = 0$  folgt  $x'^2 = 0$ . Für Lichtsignale ist also der Viererabstand unabhängig vom Bewegungssystem der Quelle.

Wir wollen nun allgemeiner Transformationen zwischen Inertialsystemen untersuchen, die den Viererabstand invariant lassen, die also  $x'^2 = x^2$  erfüllen.

Zunächst kann man zeigen, daß solche Transformationen linear sein müssen, damit geradlinig gleichförmige Bewegungen in geradlinig gleichförmige Bewegungen übergehen – wie auch anschaulich klar ist. Die allgemeine Form der Transformation ist dann

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{bzw.} \quad x' = \Lambda x. \quad (\text{VI.53})$$

Für lineare Transformationen kann man aus  $x'^2 = x^2 = 0$  für lichtartige 4-Vektoren folgern, daß für allgemeine 4-Vektoren gilt

$$x'^2 = \alpha(\Lambda) x^2, \quad (\text{VI.54})$$

und für die Umkehrtransformation erhält man einen analogen Faktor  $\alpha(\Lambda^{-1})$ . Für diesen gilt wegen  $\alpha(\mathbf{1}) = \alpha(\Lambda\Lambda^{-1}) = 1$

$$\alpha(\Lambda) = \frac{1}{\alpha(\Lambda^{-1})}. \quad (\text{VI.55})$$

Wegen der Isotropie des Raumes sollte die Transformation in einer Richtung nicht vor der Transformation in die Gegenrichtung ausgezeichnet sein, woraus folgt

$$\alpha(\Lambda) = 1. \quad (\text{VI.56})$$

Alle Transformationen

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{bzw.} \quad x' = \Lambda x \quad (\text{VI.57})$$

mit

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\mu} x_{\mu} \quad \text{bzw.} \quad x'^2 = x^2 \quad (\text{VI.58})$$

heißen **Lorentz-Transformationen** (oder auch **homogene Lorentz-Transformationen**).

Sie bilden die **Lorentz-Gruppe**  $SO(3, 1)$ .<sup>10</sup> Die Definition der Lorentz-Transformation als Transformation, die die 4-dimensionale Länge  $x^2$  invariant läßt ist ganz analog z. B. zur Definition der Drehungen im dreidimensionalen Raum, die die Länge von Vektoren invariant lassen. Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung.

Mit der invarianten Länge  $x^2$  von 4-Vektoren  $x^\mu$  ist jedes Skalarprodukt

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{VI.59})$$

invariant unter Lorentz-Transformationen, denn es kann durch 'Polarisieren' dargestellt werden durch invariante Längen:

$$a \cdot b = \frac{1}{2} [(a + b)^2 - a^2 - b^2]. \quad (\text{VI.60})$$

Die  $\Lambda^\mu{}_\nu$  der Lorentz-Transformation (VI.58) erfüllen wegen  $x'^2 = x^2$

$$x'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = x^2, \quad (\text{VI.61})$$

woraus wir ablesen

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (\text{VI.62})$$

Die linke Seite können wir schreiben als  $\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma$ , woraus mit  $\Lambda^\mu{}_\rho = (\Lambda^T)_{\rho}{}^\mu$  wird

$$\boxed{\Lambda^T g \Lambda = g} \quad (\text{VI.63})$$

Mit  $g^2 = \mathbf{1}$  folgt durch Multiplikation mit  $\Lambda^{-1}$  und mit  $g$ :

$$\boxed{\Lambda^T = g \Lambda^{-1} g} \quad (\text{VI.64})$$

und

$$(\Lambda^T)^{-1} = g \Lambda g \quad (\text{VI.65})$$

sowie

$$\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g. \quad (\text{VI.66})$$

Daher ist

$$\Lambda_\rho{}^\mu := (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho = g^{\mu\nu} \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\sigma\rho}, \quad (\text{VI.67})$$

und daher

$$(\Lambda^{-1} \Lambda)_\rho{}^\tau = (\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu \Lambda_\mu{}^\tau \quad (\text{VI.68})$$

so daß

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\tau = \delta_\rho{}^\tau} \quad (\text{VI.69})$$

was das Analogon von  $O^T O = \mathbf{1}$  im Fall der dreidimensionalen orthogonalen Transformationen ist.

Damit erhalten wir aus  $x'^\rho = \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu$

$$\Lambda_\rho{}^\mu x'^\rho = \Lambda_\rho{}^\mu \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu = \delta_\nu{}^\mu x^\nu = x^\mu \quad (\text{VI.70})$$

<sup>10</sup>Die Zahlen 3 und 1 stehen für die Signatur der Metrik, d. h. für 3 raumartige Dimensionen (mit  $-$  in der Metrik) und für eine zeitartige Dimension (mit  $+$  in der Metrik).

so daß in Einklang mit (VI.67)

$$\boxed{x^\mu = \Lambda_\rho{}^\mu x'^\rho} \quad (\text{VI.71})$$

Allgemein bezeichnet man ein 4-Vektorfeld  $A(x)$  mit dem Transformationsverhalten

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad (\text{VI.72})$$

als **kontravarianten** Vektor (oder als kontravariantes Vektorfeld), wobei

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (\text{VI.73})$$

Ein Vektorfeld mit dem Transformationsverhalten

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \quad (\text{VI.74})$$

bezeichnet man als **kovarianten** Vektor (oder als kovariantes Vektorfeld), wobei

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}. \quad (\text{VI.75})$$

Man sieht hiermit auch explizit, daß das Skalarprodukt zweier Vektorfelder invariant ist:

$$A'^\mu B'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} B_\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu B_\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} A^\nu B_\rho = \delta_\nu{}^\rho A^\nu B_\rho = A^\nu B_\nu. \quad (\text{VI.76})$$

Es bilden

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{d. h.} \quad (\partial_\mu) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{VI.77})$$

die kovarianten Komponenten eines 4-Vektors, denn

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu. \quad (\text{VI.78})$$

Analog bilden

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{d. h.} \quad (\partial^\mu) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{VI.79})$$

die kontravarianten Komponenten eines 4-Vektors, denn

$$\partial'^\mu = g^{\mu\lambda} \partial'_\lambda = g^{\mu\lambda} \Lambda_\lambda{}^\rho \partial_\rho = g^{\mu\lambda} \Lambda_\lambda{}^\rho g_{\rho\nu} \partial^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu. \quad (\text{VI.80})$$

Es ist dann

$$\partial^\mu \partial_\mu = \square = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \Delta, \quad (\text{VI.81})$$

d. h. der d'Alembert-Operator ist lorentzinvariant.

Ein Skalarfeld transformiert sich mit  $\phi'(x') = \phi(x)$ . Tensoren 2. Stufe transformieren sich gemäß

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} \quad (\text{VI.82})$$

$$T'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma T^\rho{}_\sigma \quad \text{etc.} \quad (\text{VI.83})$$

Beispiel für ein Tensorfeld 2. Stufe ist  $\partial^\nu A^\mu(x)$ , ein Skalarfeld ist z. B.  $\partial_\mu A^\mu(x) = \partial^\mu A_\mu(x)$ .

Wir definieren

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{VI.84})$$

Damit erhalten wir das Transformationsverhalten

$$\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = (\det \Lambda) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{VI.85})$$

Aus  $\Lambda^T g \Lambda = g$  folgt

$$(\det \Lambda^T)(\det g)(\det \Lambda) = \det g, \quad (\text{VI.86})$$

und da  $\det g = -1$ ,  $\det \Lambda^T = \det \Lambda$ :

$$\boxed{\det \Lambda = \pm 1} \quad (\text{VI.87})$$

Aus  $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$  erhalten wir für den Fall  $\rho = \sigma = 0$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = 1 \quad (\text{VI.88})$$

oder explizit

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \underbrace{\sum_k (\Lambda^k{}_0)^2}_{\geq 0} = 1 \quad (\text{VI.89})$$

und damit

$$(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1. \quad (\text{VI.90})$$

Das bedeutet

$$\boxed{\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1} \quad (\text{VI.91})$$

Aufgrund der beiden (voneinander unabhängigen) Bedingungen (VI.87) und (VI.91) unterscheidet man vier Klassen von Lorentz-Transformationen, die nicht stetig miteinander zusammenhängen. Die zugehörigen Matrizen lassen sich also nicht durch kontinuierliche Veränderung von Parametern ineinander überführen.

Lorentz-Transformationen mit  $\det \Lambda = +1$  nennt man **eigentliche**, solche mit  $\det \Lambda = -1$  nennt man **uneigentliche** Lorentz-Transformationen. Wenn  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ , spricht man von **orthochronen** Lorentz-Transformationen.

Man bezeichnet die vier Klassen von Transformationen oft mit

$$L_+^\uparrow, \quad L_+^\downarrow, \quad L_-^\uparrow, \quad L_-^\downarrow. \quad (\text{VI.92})$$

Dabei steht  $+(-)$  für  $\det \Lambda = +1(-1)$ , und  $\uparrow(\downarrow)$  für  $\Lambda^0{}_0 \geq +1(\leq -1)$ .

Spezielle Beispiele für die vier Klassen von Lorentz-Transformationen sind:

$$\mathcal{E} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_+^\uparrow, \quad (\text{VI.93})$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_-^\uparrow, \quad (\text{VI.94})$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_-^\downarrow, \quad (\text{VI.95})$$

$$\mathcal{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_+^\downarrow. \quad (\text{VI.96})$$

Diese vier Transformationen bilden selber eine Gruppe, die sogenannte **Kleinsche Gruppe**,

$$\{\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}. \quad (\text{VI.97})$$

$L_+^\uparrow$  bildet eine Untergruppe der homogenen Lorentz-Transformationen, die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe.<sup>11</sup> In ihr sind keine Paritätstransformationen (Raumspiegelungen) enthalten.  $L_+^\uparrow$  bildet die Gebiete I-V im obigen Minkowski-Diagramm auf sich selber ab, so daß diese invariant unter  $L_+^\uparrow$  sind.

Man kann zeigen, daß jede homogene Lorentz-Transformation geschrieben werden kann als

$$\Lambda = \text{sgn}(\Lambda^0_0) \Lambda_B(\vec{\eta}) \mathcal{R}(\vec{\varphi}) \mathcal{P}^k \quad (k \in \{0, 1\}), \quad (\text{VI.98})$$

wobei  $\Lambda_B(\vec{\eta})$  ein Boost in Richtung  $\vec{\eta}$  ist, und  $\mathcal{R}$  eine räumliche Drehung,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (\text{VI.99})$$

mit  $R \in SO(3)$  (siehe auch Übungen). Man hat daher je 3 **Erzeugende** (infinitesimale Transformationen) für die Drehungen und für die Boosts. So kann man z. B. für einen Boost in  $x$ -Richtung schreiben

$$(\Lambda^\mu_\nu) = ([\exp(\eta K_x)]^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.100})$$

<sup>11</sup>Im Englischen: 'proper orthochronous'.



mit dem infinitesimalen Boost

$$(K_x)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.101})$$

Zusätzlich zu Drehungen, Boosts und Paritätstransformationen muß man (wie bei den Galilei-Transformationen) auch Translationen betrachten. In der Raum-Zeit haben wir jetzt 4 solche Translationen, drei im Raum und eine in der Zeit, also

$$x \longrightarrow x' = x + a \quad (\text{VI.102})$$

mit einem 4-Vektor  $a$ , d. h.

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (\text{VI.103})$$

Die allgemeinen Transformationen auf dem Minkowski-Raum erhält man durch Kombination der homogenen Lorentz-Transformationen mit den Translationen,

$$x \longrightarrow x' = \Lambda x + a \quad (\text{VI.104})$$

oder

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (\text{VI.105})$$

Diese bilden die **Poincaré-Transformationen** oder **inhomogenen Lorentz-Transformationen**.

Sie bilden eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung,

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad (\text{VI.106})$$

die 10-parametrische **Poincaré-Gruppe**. Diese ist die fundamentale Symmetriegruppe der Natur.

## Kapitel VII

# Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Wir wollen nun zeigen, daß die Grundgleichungen der Elektrodynamik so formuliert werden können, daß sie in allen Inertialsystemen *dieselbe Form* haben, d. h. *forminvariant* unter Lorentz-Transformationen sind. Man spricht dann von **Kovarianz**.

### VII.1 Viererpotential und Feldstärketensor

Die Lorenz-Eichung war gegeben durch die Relation zwischen den Potentialen

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0, \quad (\text{VII.1})$$

die wir schreiben können als

$$\frac{\partial}{\partial x^k} A^k + \frac{\partial}{\partial x^0} \varphi = 0. \quad (\text{VII.2})$$

Das legt die Hypothese nahe, daß das **Viererpotential**

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.3})$$

einen kontravarianten Vierervektor bildet. Wir werden dies auch in Abschnitt VII.3 explizit bestätigt finden.

Mit dem Viererpotential wird die Eichtransformation

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

zu

$$\boxed{A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi} \quad (\text{VII.5})$$

Die Lorenz-Eichbedingung ist dann

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad (\text{VII.6})$$

und dies ist offenbar *invariant* unter Lorentz-Transformationen. Man spricht daher von einer **kovarianten Eichung**.

Mit  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  und  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  folgt für die Feldstärken

$$\begin{aligned} B_1 &= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 \\ B_2 &= \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ B_3 &= \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \end{aligned} \quad (\text{VII.7})$$

und

$$\begin{aligned} E_1 &= -\partial_1 \varphi - \partial_0 A^1 = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \\ E_2 &= -\partial_2 \varphi - \partial_0 A^2 = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 \\ E_3 &= -\partial_3 \varphi - \partial_0 A^3 = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3. \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

Wir können das zusammenfassen zu

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (\text{VII.9})$$

mit dem **Feldstärketensor**

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.10})$$

Damit haben wir

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.11})$$

Offenbar ist der Feldstärketensor antisymmetrisch,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (\text{VII.12})$$

Wichtig ist, daß  $F_{\mu\nu}$  eichinvariant ist. Dies sieht man daran, daß darin nur die (eichinvarianten) Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  enthalten sind. Alternativ kann man dies aus der Anwendung einer Eichtransformation (VII.4) auf (VII.9) erhalten.

## VII.2 Transformation der elektromagnetischen Felder

Wir beobachten, daß  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  eine *kovariante* Beziehung ist, während  $\partial_\mu A^\mu = 0$  *invariant* ist.  $\partial_\mu A^\mu = 0$  ist nämlich in allen Inertialsystemen *gleich* (hier gleich 0). Die Komponenten von  $F^{\mu\nu}$  ändern sich unter Lorentz-Transformationen, die Form bleibt aber gleich:

$$F'^{\mu\nu} = \partial'^\mu A'^\nu - \partial'^\nu A'^\mu. \quad (\text{VII.13})$$

Betrachten wir das Verhalten der Felder unter einer speziellen Lorentz-Transformation in  $x$ -Richtung, so finden wir

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\rho F^{\rho\sigma} (\Lambda^T)_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_1 & -E'_2 & -E'_3 \\ E'_1 & 0 & -B'_3 & B'_2 \\ E'_2 & B'_3 & 0 & -B'_1 \\ E'_3 & -B'_2 & B'_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.14})$$

Durch Einsetzen der Matrix (VI.100) für diesen Boost erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

Allgemein findet man bei einem Boost mit  $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$  für die Komponenten parallel bzw. senkrecht zu  $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

Als Beispiel betrachten wir ein im Ruhesystem rein elektrisches Feld  $\mathbf{E}_0$ . Dann ist im bewegten System

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{E}_{0\perp} \\ \mathbf{B}' &= -\gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{0\perp} = -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}', \end{aligned} \quad (\text{VII.17})$$

wie bereits früher gesehen. Alternativ kann man auch das Viererpotential transformieren:

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 &= \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 &= A^2 \\ A'^3 &= A^3, \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

so daß für die räumlichen Komponenten (d. h. für  $\mathbf{A}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_{\parallel} &= \gamma(\mathbf{A}_{\parallel} - \beta A^0) \\ \mathbf{A}'_{\perp} &= \mathbf{A}_{\perp}. \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

Ein Anwendungsbeispiel sind die Potentiale  $A^0$  und  $\mathbf{A}$  eines (beliebig schnell, aber mit  $v < c$ , s. u.) bewegten Elektrons. Im Ruhesystem haben wir

$$A^0 = \frac{e}{r}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (\text{VII.20})$$

In einem System, in dem sich das Elektron mit  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$  bewegt (das bedeutet  $\boldsymbol{\beta} \rightarrow -\boldsymbol{\beta}$  in obiger Formel) ist dann

$$\begin{aligned} A'^0(x') &= \gamma A^0(x) \\ \mathbf{A}'_{\parallel}(x') &= \mathbf{A}'_{\parallel}(x') = \gamma \boldsymbol{\beta} A^0 \end{aligned} \quad (\text{VII.21})$$

mit

$$\begin{aligned}x^1 &= \gamma(x'^1 - \beta x'^0) \\x^2 &= x'^2 \\x^3 &= x'^3.\end{aligned}\tag{VII.22}$$

Man erhält für  $ct' = x'^0 = 0$  die Äquipotentialflächen aus

$$A'^0(\mathbf{x}') = \frac{\gamma e}{r}\tag{VII.23}$$

mit

$$r = \sqrt{\gamma^2(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2},\tag{VII.24}$$

so daß

$$A'^0 = \frac{e}{\sqrt{(x'^1)^2 + (1 - \beta^2)[(x'^2)^2 + (x'^3)^2]}}.\tag{VII.25}$$

Die Äquipotentialflächen  $A^0 = \text{const.}$  sind daher Ellipsoide, abgeplattet in Richtung der Geschwindigkeit. Das Verhältnis der Achsen ist

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \beta^2}.\tag{VII.26}$$

Abbildung

### VII.3 Viererstromdichte und Maxwell-Gleichungen

Wir betrachten zunächst die homogenen Maxwell-Gleichungen. Dazu führen wir den **dualen Feldstärketensor**  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  ein:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.\tag{VII.27}$$

Offenbar ist  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  antisymmetrisch,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu}.\tag{VII.28}$$

Die Komponenten von  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  erhält man durch explizite Rechnung (s. Übungen), z. B.

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2}(\epsilon^{0123} F_{23} + \epsilon^{0132} F_{32}).\tag{VII.29}$$

Man findet<sup>1</sup>

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{VII.30}$$

<sup>1</sup>Als Merkhilfe: dies erhält man aus  $(F^{\mu\nu})$  durch  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  und  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ .

Wir haben also insbesondere

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{kl} &= \epsilon^{klm} E_m \\ \tilde{F}^{k0} &= B_k.\end{aligned}\tag{VII.31}$$

Wir sehen direkt, daß

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma \\ &= 0,\end{aligned}\tag{VII.32}$$

da in der zweiten Zeile der erste Faktor antisymmetrisch in  $\rho, \sigma$  ist, der zweite dagegen symmetrisch. Die Gleichung

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\tag{VII.33}$$

ist gleichbedeutend mit den homogenen Maxwell-Gleichungen, wie man leicht überprüft (s. Übungen). Alternativ kann man für die homogenen Maxwell-Gleichungen schreiben

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = 0\tag{VII.34}$$

was man aus (VII.33) mit (VII.27) erhält, bzw.

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0\tag{VII.35}$$

für alle Kombinationen von  $\mu, \rho, \sigma$ .

Für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen betrachten wir die 4-Divergenz von  $F^{\mu\nu}$ . In Lorenz-Eichung ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) finden wir

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu}_{=0} = \square A^\nu.\tag{VII.36}$$

Die rechte Seite ist per Konstruktion ein 4-Vektor, da  $F^{\mu\nu}$  ein Tensor 2. Stufe und  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  ein Skalar unter Lorentz-Transformationen ist. In Komponenten haben wir (vgl. (V.37) und (V.39))

$$\square A^0 = \square \varphi = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} (c\rho)\tag{VII.37}$$

$$(\square A^k) = \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},\tag{VII.38}$$

so daß

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}.\tag{VII.39}$$

Wir definieren daher den **Viererstromvektor**

$$(j^\nu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix},\tag{VII.40}$$

mit dem wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form schreiben können als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu\tag{VII.41}$$

Dies ist offenbar unabhängig von der Wahl einer Eichung, da hierin die Potentiale nicht mehr enthalten sind.

Unmittelbare Folge der Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu}$  ist (da  $\partial_\nu\partial_\mu$  symmetrisch in  $\nu$  und  $\mu$  ist)

$$\partial_\nu j^\nu = \frac{c}{4\pi} \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{VII.42})$$

d. h.

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_0 j^0 + \partial_l j^l = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (\text{VII.43})$$

Also erhalten wir die Kontinuitätsgleichung in kovarianter Form als

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad (\text{VII.44})$$

Allgemein spricht man bei einem Viererstrom, der diese Gleichung erfüllt, von einem **erhaltenen Strom**.

Um die Vierervektor-Eigenschaft von  $j^\nu$  genauer zu untersuchen, betrachten wir eine Ladungs- und Stromverteilung, für die in einem System I  $\mathbf{j} = 0$  gilt, d. h. in diesem System ist

$$j^0(x) = c\rho_{(0)}, \quad j^k(x) = 0. \quad (\text{VII.45})$$

In einem mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in 1-Richtung bewegten System I' gilt dann

$$\begin{aligned} \rho' &= \gamma\rho_{(0)} = \frac{\rho_{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ j'^1 &= -\gamma\frac{v}{c}j^0 = -\frac{v\rho_{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -v\rho' \\ j'^2 &= j'^3 = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.46})$$

Die Ladungsdichte ist also in I' um den Faktor  $\gamma$  erhöht. Die gesamte Ladung in einem Volumen  $V$  ist aber *unverändert*:

$$Q = \int_V \rho(x) d^3x = \frac{1}{c} \int_V j^0(x) d^3x \quad (\text{VII.47})$$

ist lorentzinvariant, denn das Volumenelement transformiert sich wegen der Lorentz-Kontraktion gemäß

$$d^3x' = \frac{1}{\gamma} d^3x. \quad (\text{VII.48})$$

■ Allgemein gilt: das Raumintegral über die 0-Komponente eines erhaltenen Stromes ist eine Erhaltungsgröße und lorentzinvariant.

Da  $j^\mu$  ein 4-Vektor und  $\square$  ein Skalar unter Lorentz-Transformationen, so folgt aus

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (\text{VII.49})$$

daß  $A^\nu$  tatsächlich ein 4-Vektor ist, wie wir anfangs angenommen hatten.

Man beachte, daß die hier in kovarianter Form gefundenen Maxwell-Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Lorenz-Eichung in *jedem* Bezugssystem gelten. Sie sind in dieser Form kovariant, haben also in jedem Bezugssystem dieselbe Form.

## VII.4 Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Die beiden Größen

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (\text{VII.50})$$

und

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{VII.51})$$

sind per Konstruktion Invarianten unter Lorentz-Transformationen (und werden wegen dieser Konstruktion als *invariante Spuren* bezeichnet).

Daraus folgt z. B. (siehe auch Übungen)

- Ist in einem Inertialsystem  $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ , so ist es in jedem so. Analoges gilt für  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$  und  $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ .
- Ist in einem Inertialsystem der Winkel  $\angle(\mathbf{E}, \mathbf{B}) > \pi/2$ , so ist es in allen der Fall. Analoges gilt für  $\angle(\mathbf{E}, \mathbf{B}) < \pi/2$  und  $\angle(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \pi/2$ .
- Ist in einem Inertialsystem  $\mathbf{B} = 0$  (oder  $\mathbf{E} = 0$ ), so ist in allen Inertialsystemen  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ . Eine Umkehrung dieses Satzes gilt nur, falls  $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$ : Ist  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , so läßt sich für  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$  ein Inertialsystem finden, in dem  $\begin{cases} \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{B} = 0 \end{cases}$  ist.

## VII.5 Transformation ebener elektromagnetischer Wellen und Doppler-Effekt

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle mit elektrischem Feld

$$\mathbf{E} = \varepsilon e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{mit } \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{VII.52})$$

Die Phase

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (\text{VII.53})$$

der Welle ist ein Skalar und invariant unter Lorentz-Transformationen. Wir schreiben

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (\text{VII.54})$$

so daß

$$\mathbf{E} = \varepsilon e^{-ik_\mu x^\mu} = \varepsilon e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{VII.55})$$

Wegen

$$k^\mu = \partial^\mu(k \cdot x) = \partial^\mu(k^\nu x_\nu) \quad (\text{VII.56})$$

ist  $k^\mu$  ein 4-Vektor. Die Relation  $\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  wird zu

$$k^2 = k^\mu k_\mu = 0 \quad (\text{VII.57})$$

und es ist

$$\partial_\mu e^{-ik \cdot x} = -ik_\mu e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{VII.58})$$



Das Produkt  $k \cdot x$  ist invariant unter Lorentz-Transformationen, die Frequenz  $\omega$  und der Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  ändern sich aber unter solchen Transformationen gemäß  $k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} k^{\nu}$ . Für einen Boost in  $x$ -Richtung mit  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$  ist z. B.

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta \cdot \mathbf{k}), \quad k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0), \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = k^3, \quad (\text{VII.59})$$

und wegen  $k'^2 = k^2 = 0$  ist

$$k^0 = |\mathbf{k}|, \quad k'^0 = |\mathbf{k}'|. \quad (\text{VII.60})$$

Daher ist mit  $\theta = \angle(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{k}) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{k})$

$$k'^0 = \gamma(1 - \beta \cos \theta) k^0 \quad (\text{VII.61})$$

oder

$$\boxed{\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)} \quad (\text{VII.62})$$

Diese Frequenzverschiebung bezeichnet man als den **Doppler-Effekt**.

Wir wollen zwei Spezialfälle des Doppler-Effekts betrachten, in denen die Transformation in Richtung des Wellenvektors bzw. transversal dazu ist.

- Für  $\theta = 0, \pi$  finden wir den **longitudinalen** Doppler-Effekt:

$$\omega' = \gamma \omega (1 \mp \beta) = \begin{cases} \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ \omega \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \end{cases} \quad (\text{VII.63})$$

Für kleine  $\beta = v/c \ll 1$  können wir dies entwickeln und finden

$$\omega' \simeq \omega (1 \mp \beta) \quad (\text{VII.64})$$

wie bei der Galilei-Transformation.

- Für  $\theta = \frac{\pi}{2}$  finden wir den **transversalen** Doppler-Effekt:

$$\omega' = \gamma \omega \quad (\text{VII.65})$$

woraus wir für kleine  $\beta = v/c \ll 1$  erhalten

$$\omega' \simeq \omega \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right). \quad (\text{VII.66})$$

Der transversale Doppler-Effekt ist (auch bei kleinen Geschwindigkeiten) ein relativistischer Effekt, der keine Analogie in der nicht-relativistischen Physik hat. Dieser Effekt ist bei kleinen Geschwindigkeiten sehr klein, wie wir an der quadratischen Abhängigkeit von  $\beta$  sehen. Er wurde aber experimentell beobachtet.

Wenden wir uns wieder dem allgemeinen Fall zu und wählen das Koordinatensystem so, daß der Wellenzahlvektor in der  $x^1$ - $x^2$ -Ebene liegt. Dann haben wir für die beiden Winkel  $\theta = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{k})$ ,  $\theta' = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{k}')$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} = \frac{ck_2}{\omega} \\ \sin \theta' &= \frac{k'_2}{|\mathbf{k}'|} = \frac{ck_2}{\omega'} \end{aligned} \quad (\text{VII.67})$$

und damit

$$\sin \theta' = \frac{\omega}{\omega'} \sin \theta \quad (\text{VII.68})$$

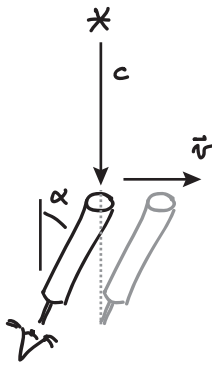
bzw. mittels der Formel (VII.62) für den Doppler-Effekt

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \sin \theta \quad (\text{VII.69})$$

Diesen Effekt der Bewegung auf die Richtung der Welle bezeichnet man als **Aberration**. Für  $\theta = \pi/2$  und  $\beta \ll 1$  finden wir

$$\begin{aligned} \sin \theta' &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta' \right) \simeq \sqrt{1 - \beta^2} \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta' &\simeq \frac{v}{c}. \end{aligned} \quad (\text{VII.70})$$

Dieser Effekt ist aus der Astronomie bekannt, wo die Aberration des Sternenlichts eine Rolle spielt. Ist das Fernglas während des Lichteinfalls bewegt, muß es schräg gehalten werden.

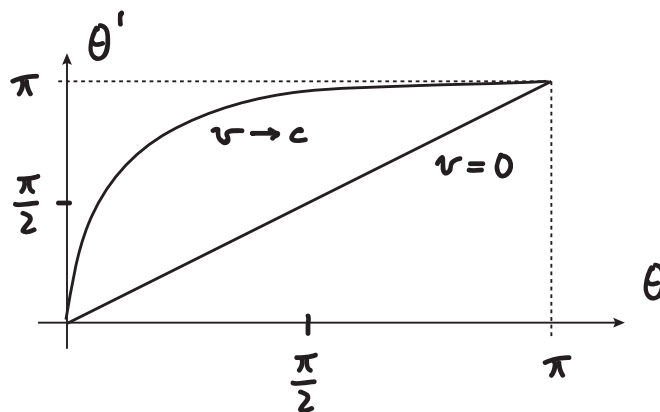


Für den entsprechenden Vorhaltewinkel  $\alpha$  gilt

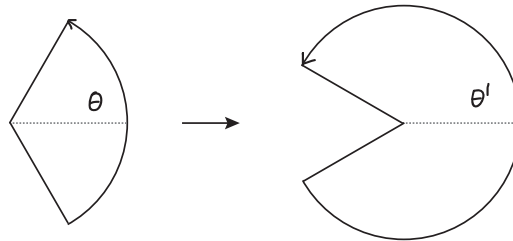
$$\tan \alpha \simeq \frac{v}{c}, \quad (\text{VII.71})$$

und man findet experimentell typischerweise  $\alpha_{\text{exp}} \simeq 10^{-4}$ , was  $v = 30 \text{ km/s}$  und damit der Geschwindigkeit der Erde auf der Bahn um die Sonne entspricht.

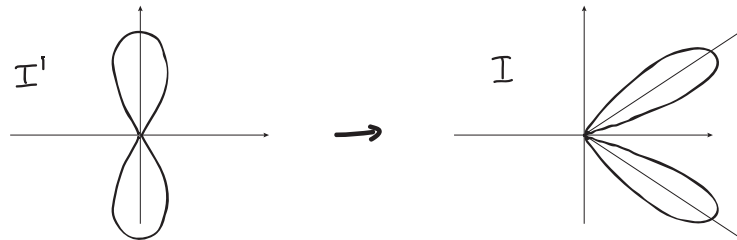
Für  $\beta \leq 1$  ergibt die Formel (VII.69) den folgenden Zusammenhang zwischen  $\theta$  und  $\theta'$ :



Es wird also ein kleiner Winkelbereich im System I auf einen großen Winkelbereich im System I' abgebildet.



Emittiert also ein in I' ruhendes System elektromagnetische Wellen isotrop, so erscheint in I diese Strahlung fast vollständig in Vorwärtsrichtung. Für die Intensitätsverteilung eines Hertzschen Dipols (die wir später herleiten werden) bei hoher Geschwindigkeit findet man folgendes Bild:



## VII.6 Elektrodynamik in Differentialformen\*

# Kapitel VIII

## Relativistische Mechanik

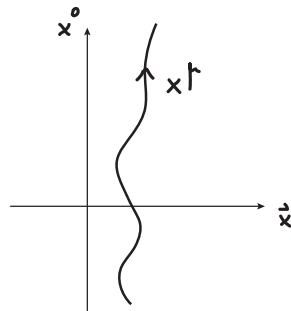
Wir wollen nun sehen, wie die klassische Mechanik durch die relativistische Struktur der Raumzeit zur relativistischen Mechanik modifiziert werden muß. Natürlich erwarten wir, daß sich bei kleinen Geschwindigkeiten die klassische Mechanik als Grenzfall der relativistischen Mechanik ergibt.

### VIII.1 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit

Die Weltlinie eines Teilchens der Masse  $m$  wird durch eine Kurve im Minkowski-Raum beschrieben, die man parametrisieren kann:

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad x = x(\lambda). \quad (\text{VIII.1})$$

Besonders nützlich ist es, den Parameter so zu wählen, daß er invariant unter Lorentz-Transformationen ist.



Im System I hat das Teilchen die momentane Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$ , ändert also seinen Ort um  $d\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) dt$ . Damit ist das infinitesimale invariante Linienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{x}|^2 = c^2 dt^2(1 - \beta^2). \quad (\text{VIII.2})$$

Im sogenannten momentan begleitenden Inertialsystem  $\Gamma'$ , in dem das Teilchen momentan in Ruhe ist, gilt

$$\begin{aligned} dt' &=: d\tau, & d\mathbf{x}' &= 0 \\ \implies ds &= c d\tau, \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

und  $d\tau$  ist daher Lorentz-invariant (da  $ds$  invariant ist) mit

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2(t)} = \frac{dt}{\gamma(t)} < dt, \quad (\text{VIII.4})$$

und

$$\tau = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \beta^2(t)} \quad (\text{VIII.5})$$

mit zwei Punkten  $A$  und  $B$  auf der Weltlinie des Teilchens.  $\tau$  heißt **Eigenzeit** und kann als die Zeit interpretiert werden, die im System des Teilchens vergeht. Die Benutzung der Eigenzeit  $\tau$  als Weltlinienparameter stellt sich als besonders nützlich heraus. (In der Mathematik nennt man die Wahl dieses Parameters die *Parametrisierung nach der Bogenlänge*.) Die im System I vergehende Zeit ist

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma(\tau) d\tau. \quad (\text{VIII.6})$$

Man definiert die **Vierergeschwindigkeit**

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (\text{VIII.7})$$

so daß

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2 \quad (\text{VIII.8})$$

zeitartig ist.<sup>1</sup> Weiter definiert man die **Viererbeschleunigung**

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt}. \quad (\text{VIII.9})$$

Durch Differenzieren von  $u^2 = c^2$  nach  $\tau$  erhalten wir

$$u^\mu a_\mu = 0. \quad (\text{VIII.10})$$

Die Vierergeschwindigkeit und die Viererbeschleunigung stehen also immer senkrecht aufeinander. (Beide sind Vektoren im 4-dimensionalen Minkowski-Raum.)

## VIII.2 Energie-Impuls-Beziehung, Bewegungsgleichung

Wir erinnern uns an die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (\text{VIII.11})$$

die wir ausdrücken können als

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} d^3x \quad (\text{VIII.12})$$

<sup>1</sup>Man beachte, daß  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  ohne den Faktor  $\gamma$  nicht Teil eines Vierervektors sein kann, da  $t$  kein Skalar unter Lorentz-Transformationen ist.

mit der Kraftdichte

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (\text{VIII.13})$$

Die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dt, \quad (\text{VIII.14})$$

da wegen  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$  das magnetische Feld keine Arbeit leistet (siehe auch Übungen). Für eine Ladungs- und Stromverteilung im Volumen  $V$  haben wir daher

$$dW = \left( \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x \right) dt \quad (\text{VIII.15})$$

und daher die Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (\text{VIII.16})$$

Betrachte nun die Größe

$$f^\mu := \frac{1}{c} j_\nu F^{\mu\nu}, \quad (\text{VIII.17})$$

die per Konstruktion ein 4-Vektor ist. Explizit ist für die räumlichen Komponenten

$$f^1 = \rho E_1 + \frac{1}{c} (j_2 B_3 - j_3 B_2) \quad (\text{VIII.18})$$

usw., also gerade die Lorentzkraftdichte. Für  $\mu = 0$  ist aber

$$f^0 = \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{VIII.19})$$

gerade die Leistungsdichte.  $f^\mu$  faßt also die Kraft- und die Leistungsdichte zu einem 4-Vektor zusammen,

$$(f^\mu) = \begin{pmatrix} f^0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}. \quad (\text{VIII.20})$$

Wir betrachten jetzt die Integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathbf{f} dt d^3x = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathbf{f} d^4x \quad (\text{VIII.21})$$

und

$$\frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_V f^0 d^4x, \quad (\text{VIII.22})$$

worin das Volumenelement der 4-dimensionalen Raum-Zeit

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt d^3x \quad (\text{VIII.23})$$

ist und wir nur die Grenzen der Zeit- bzw.  $x^0$ -Integration angeben, während die  $d^3x$ -Integration über den ganzen Raum ausgeführt wird. Die Integraloperation

$$\int \dots d^4x \quad (\text{VIII.24})$$

ist invariant unter Lorentztransformationen  $\Lambda$ , denn

$$d^4x' = (\det \Lambda) d^4x = \begin{cases} +d^4x & \text{f. eigentliche L.-Transf.} \\ -d^4x & \text{f. uneigentliche L.-Transf.} \end{cases} \quad (\text{VIII.25})$$

Für uneigentliche Lorentz-Transformationen sind aber gleichzeitig noch die Integralgrenzen zu vertauschen, so daß sich insgesamt auch für diese die Invarianz ergibt.

Wir wenden nun obige Integrale für die Kraft auf ein Teilchen an. Dabei beachten wir das 2. Newtonsche Axiom

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{VIII.26})$$

sowie die Gleichheit der vom Feld geleisteten Arbeit und der Zunahme der Teilchenenergie

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}. \quad (\text{VIII.27})$$

Damit erhalten wir

$$\left( \frac{1}{c} \int_1^2 f^\mu d^4x \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(E_2 - E_1) \\ \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{VIII.28})$$

Die linke Seite ist als 4-dimensionales Integral über einen 4-Vektor wieder ein 4-Vektor. Daher muß auch die rechte Seite ein 4-Vektor sein. Dies ist erfüllt, wenn der **Energie-Impuls-Vektor** oder **Viererimpuls**

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.29})$$

ein 4-Vektor ist.<sup>2</sup>

Wir finden dann, daß

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \lambda \quad (\text{VIII.30})$$

eine Lorentz-Invariante ist. Im Ruhesystem des Teilchens ( $\mathbf{p} = 0$ ) haben wir

$$\sqrt{\lambda} = \frac{E_0}{c}, \quad (\text{VIII.31})$$

worin  $E_0$  die **Ruheenergie** des Teilchens ist. Die Energie eines bewegten Teilchens ist

$$E = \sqrt{E_0^2 + c^2 \mathbf{p}^2}, \quad (\text{VIII.32})$$

woraus wir für kleine Impulse  $\mathbf{p}$  erhalten

$$E = E_0 \sqrt{1 + \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{E_0^2}} \simeq E_0 + \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{2E_0}. \quad (\text{VIII.33})$$

Wir vergleichen dies mit der kinetischen Energie der Newtonschen Mechanik

$$T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (\text{VIII.34})$$

<sup>2</sup>Strenggenommen ist hier nur erforderlich, daß die *Differenzen* von Energien und Impulsen zusammen einen 4-Vektor bilden. Es ist aber sinnvoll und konsistent, dies auch für den Vektor in (VIII.29) anzunehmen.

die bei kleinen Impulsen eine korrekte Beschreibung der Teilchenenergie liefert. Übereinstimmung mit dem zweiten Term in (VIII.33) erfordert

$$\boxed{E_0 = mc^2} \quad (\text{VIII.35})$$

für die Ruheenergie des Teilchens. Man bezeichnet  $m$  daher auch als **Ruhemasse**. Jeder Masse wird durch diese Beziehung eine Energie zugeordnet. In der klassischen Mechanik alleine ist die Teilchenzahl erhalten, so daß die Ruheenergien für physikalische Prozesse keine Rolle spielen und in der Wahl des Nullpunkts der Energie absorbiert werden können. In der relativistischen Mechanik ist die Ruheenergie dagegen von großer Bedeutung.

Wegen (VIII.30) und (VIII.31) haben wir also<sup>3</sup>

$$p^2 = p_\mu p^\mu = (mc)^2 \quad (\text{VIII.37})$$

und

$$\boxed{E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}}. \quad (\text{VIII.38})$$

Weil  $p^2$  eine Invariante ist, bezeichnet man  $m$  aufgrund von (VIII.37) auch oft als **invariante Masse**.

Für masselose Teilchen (z.B. für Photonen) oder für Teilchen im ultrarelativistischen Grenzfall  $|\mathbf{p}| \gg mc$  ist

$$E = c |\mathbf{p}|. \quad (\text{VIII.39})$$

Tragen wir Energie und Impuls in einem 4-dimensionalen  $(E/c, \mathbf{p})$ -Raum auf, so bestimmt

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m^2 c^4 \quad (\text{VIII.40})$$

ein Hyperboloid (bzw. eine Schale davon), die sogenannte **Massenschale**.

#### Abbildung

Die Abhängigkeit von  $E$  und  $\mathbf{p}$  von der Geschwindigkeit erhält man durch Anwendung eines Lorentz-Boost auf den 4-Vektor im Ruhesystem,

$$\begin{pmatrix} p^\mu \\ p_{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{VIII.41})$$

als

$$E = c\gamma p_{(0)}^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{VIII.42})$$

<sup>3</sup>In der Teilchenphysik benutzt man oft sogenannte *natürliche Einheiten*, in denen man  $c = 1$  setzt, so daß diese Gleichungen die besonders einfache Form

$$\begin{aligned} p^2 &= m^2 \\ E &= \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.36})$$

erhalten.



d. h.

$$\boxed{E = \gamma mc^2} \quad (\text{VIII.43})$$

und

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{VIII.44})$$

d. h.

$$\boxed{\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}} \quad (\text{VIII.45})$$

oder

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad (\text{VIII.46})$$

oder

$$\mathbf{v} = c^2 \frac{\mathbf{p}}{E}. \quad (\text{VIII.47})$$

Damit kann der Viererimpuls durch die Vierergeschwindigkeit ausgedrückt werden als

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\mathbf{v} \end{pmatrix} = m(u^\mu). \quad (\text{VIII.48})$$

Man bezeichnete früher  $\gamma m$  oft als 'geschwindigkeitsabhängige Masse'. Diese Bezeichnung hat sich in vielen Zusammenhängen als sehr irreführend erwiesen und wird nicht mehr benutzt. Man spricht nur noch von der Ruhemasse (oder invarianten Masse)  $m$ .

Aus (VIII.47) erhalten wir

$$|\mathbf{v}| = c \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{E} < c \quad \text{falls } m > 0, \quad (\text{VIII.49})$$

so daß

$$\lim_{E \rightarrow \infty} |\mathbf{v}| = c. \quad (\text{VIII.50})$$

Während in der klassischen Mechanik die Geschwindigkeit beliebig groß werden kann, ist in der speziellen Relativitätstheorie die Geschwindigkeit eines Teilchens durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt. Ein masseloses Teilchen bewegt sich dagegen immer mit Lichtgeschwindigkeit.

Die welthistorische Bedeutung der speziellen Relativitätstheorie beruht nicht so sehr auf der Formel  $E_0 = mc^2$ , wie oft behauptet wird. Entscheidend ist vielmehr daß – anders als in der klassischen Mechanik – die kinetische Energie und die Masse nicht mehr separate Erhaltungsgrößen sind. Erst dadurch wird erklärbar, daß ein Teilchen in Ruhe zerfallen kann und dabei seine Ruheenergie (zum Teil oder ganz) in kinetische Energie der Zerfallsprodukte umgewandelt werden kann. Dadurch werden verschiedenste Kernreaktionen möglich, und sogar die komplette Umwandlung von Ruheenergie in reine Strahlungsenergie zum Beispiel in der Vernichtung eines Elektrons und eines Positrons in zwei Photonen,  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ .

Die Bewegungsgleichung des Teilchens erhalten wir aus der Zeitableitung der Integrale (VIII.28) nach der oberen zeitlichen Integralgrenze  $t_2$  als

$$\boxed{\int f^\mu d^3x = \frac{d}{dt} p^\mu} \quad (\text{VIII.51})$$

Für die räumlichen Komponenten ergibt dies gerade die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{d}{dt} (\gamma m\mathbf{v}). \quad (\text{VIII.52})$$

Eine ganz analoge Gleichung gilt natürlich auch für andere Kräfte, die auf das Teilchen wirken.

Für die kovariante Formulierung sollte die Kraft Teil eines 4-Vektors sein, was  $\int f^\mu d^3x$  offenbar nicht ist. Wir definieren daher die **Viererkraft** oder **Minkowski-Kraft**

$$F^\mu := \gamma \int f^\mu d^3x, \quad (\text{VIII.53})$$

was für die Lorentz-Kraft bedeutet

$$F^\mu = \gamma \frac{1}{c} \int j_\nu F^{\mu\nu} d^3x. \quad (\text{VIII.54})$$

Für ein Punktteilchen der Ladung  $q$  ist also

$$F^\mu = \frac{q}{c} u_\nu F^{\mu\nu}, \quad (\text{VIII.55})$$

was für die räumlichen Komponenten gerade ergibt

$$F^k = \left[ \gamma q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right]^k. \quad (\text{VIII.56})$$

Aus  $p^\mu = m u^\mu$  folgt

$$\begin{aligned} \gamma \frac{dp^\mu}{dt} &= \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = m a^\mu \\ &= \gamma \int f^\mu d^3x. \end{aligned} \quad (\text{VIII.57})$$

Für ein Punktteilchen ist dies gleich  $(q/c)u_\nu F^{\mu\nu} = F^\mu$ , so daß in diesem Fall

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} p^\mu = m \frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu} \quad (\text{VIII.58})$$

und wegen  $u_\mu a^\mu = 0$  folgt

$$u_\mu F^\mu = m u_\mu a^\mu = 0. \quad (\text{VIII.59})$$

## VIII.3 Lagrange- und Hamiltonfunktion

### VIII.3.a Freies Teilchen

Im Lagrange-Formalismus betrachtet man die **Wirkung**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (\text{VIII.60})$$

mit der Lagrangefunktion  $L$ , die nur von den Koordinaten, ihren zeitlichen Ableitungen und der Zeit abhängt,  $L = L(q, \dot{q}, t)$ . Die Bewegungsgleichung erhält man aus dem Verschwinden der Variation der Wirkung bei festgehaltenen Endpunkten,

$$\delta S = 0 \quad \text{mit} \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (\text{VIII.61})$$

Dies ist äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{VIII.62})$$

mit dem **kanonischen Impuls**

$$P_i = p_{\text{kan } i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (\text{VIII.63})$$

Diese Formulierung ist offenbar nicht manifest invariant unter Lorentztransformationen, wie es für die relativistische Beschreibung wünschenswert wäre. In der relativistischen Mechanik sollte die physikalisch konsistente Beschreibung zu einer Poincaré-invarianten Bewegungsgleichung führen, da sonst die Weltlinie des Teilchens vom Beobachter abhängig wäre. Die Wirkung sollte daher insbesondere ein Skalar unter Lorentz-Transformationen sein.<sup>4</sup>

Wir betrachten zunächst ein freies Teilchen. Nach obigen Überlegungen sollte also die Wirkung für jede gegebene Weltlinie  $\mathcal{P}$  für alle Beobachter den gleichen Wert haben.

#### Abbildung

Dazu bietet es sich an, die Wirkung durch die Eigenzeit auszudrücken mit dem Ansatz

$$S[x(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, u) d\tau \quad (\text{VIII.64})$$

mit den (Raum-Zeit-) 4-Vektor  $(x^\mu)$  und der 4-Geschwindigkeit  $(u^\mu)$ . Man kann aus der Poincaré-Invarianz folgern, daß hierbei die Funktion  $f(x, u)$  eine Konstante sein muß: Aus der Translationsinvarianz folgt, daß  $f$  von  $x$  unabhängig ist. Aus der Invarianz unter Lorentz-Booster folgt weiter, daß  $f$  nur vom Quadrat der 4-Geschwindigkeit abhängen kann, also wegen  $u^2 = c^2$  nur von der Lichtgeschwindigkeit. Daher

$$S[x(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{const.} d\tau. \quad (\text{VIII.65})$$

Damit  $S$  die Dimension einer Wirkung hat, muß dann gelten

$$[\text{const.}] = \frac{[\text{Wirkung}]}{[\text{Zeit}]}. \quad (\text{VIII.66})$$

Für ein Teilchen der Masse  $m$  ist die einzige Möglichkeit, eine Konstante dieser Dimension zu konstruieren, der Ausdruck  $mc^2$ . Damit haben wir

$$S = -mc^2 \int_{\mathcal{P}} d\tau = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -mc \int_{\mathcal{P}} ds \quad (\text{VIII.67})$$

<sup>4</sup>Es ist in einigen Fällen möglich, daß eine nicht invariante Wirkung zu einer invarianten Bewegungsgleichung führt. Diese Komplikation spielt aber im Zusammenhang der relativistischen Mechanik von Punktteilchen keine Rolle.

worin wir in der letzten Gleichung das infinitesimale Linienelement aus (VIII.3) benutzt haben. Das Minuszeichen ist gewählt, damit das gesuchte Extremum der Wirkung ein Minimum ist.

Es ist eine interessante Beobachtung, daß das letzte Integral in (VIII.67) gerade die 4-dimensionale Länge der Weltlinie ist.<sup>5</sup> Das Minimum der Wirkung wird damit erreicht, wenn diese 4-dimensionale Länge *maximal* ist. Dies liegt an der Metrik der 4-dimensionalen Raumzeit: Würde das Teilchen sich durch eine Zickzack-Bewegung, die aus lichtartigen Segmenten ( $ds^2 = 0$ ) zusammengesetzt ist, von Punkt 1 nach 2 bewegen, wäre die entsprechende 4-dimensionale Weglänge sogar gleich Null. Die *maximale* 4-dimensionale Weglänge entspricht einer *minimalen* 3-dimensionalen Weglänge, wie wir sie für ein freies Teilchen erwarten.

Wegen  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$  können wir auch schreiben

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} dt. \quad (\text{VIII.68})$$

Hieraus lesen wir die Lagrangefunktion ab,

$$\boxed{L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{VIII.69})$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall,  $v \ll c$  erhalten wir

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{VIII.70})$$

und damit

$$S \simeq \text{const} + \int \frac{mv^2}{2} dt \quad (\text{VIII.71})$$

und damit die erwartete nicht-relativistische Lagrangefunktion

$$L_{\text{nicht-rel}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (\text{VIII.72})$$

Zurückkehrend zum Fall beliebiger Geschwindigkeit, erhalten wir den kanonischen Impuls

$$p_{\text{kan } i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv_i \quad (\text{VIII.73})$$

oder

$$\mathbf{p}_{\text{kan}} = \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (\text{VIII.74})$$

und die Hamilton-Funktion

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \gamma mc^2 = E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2} \quad (\text{VIII.75})$$

wie erwartet.

---

<sup>5</sup>Um die Länge einer gegebenen Kurve zu bestimmen, wird man diese im allgemeinen parametrisieren, was auf verschiedene Arten geschehen kann. Die obige Wirkung ist aber invariant unter einer Reparametrisierung der Kurve, wie man leicht zeigen kann.

Nach kurzer Rechnung findet man mittels der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0} \quad (\text{VIII.76})$$

oder

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{VIII.77})$$

oder

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (\text{VIII.78})$$

### VIII.3.b Teilchen im elektromagnetischen Feld

Wir betrachten nun ein Teilchen der Masse  $m$  und der Ladung  $q$  im elektromagnetischen Feld. Als Ansatz für die Wirkung schreiben wir

$$S = S_0 + S_{\text{int}}, \quad (\text{VIII.79})$$

worin  $S_0$  die freie Wirkung (VIII.67) ist.  $S_{\text{int}}$  steht für den Teil der Wirkung, der die Wechselwirkung mit dem Feld beschreibt.

Auch hier soll  $S_{\text{int}}$  wieder Poincaré-invariant sein. Darüber hinaus soll dieser Term das Feld entlang der Weltlinie des Teilchens und die Geschwindigkeit  $u^\mu$  involvieren, damit aus diesem Term die rechte Seite der Bewegungsgleichung (VIII.58) resultieren kann. Da  $(u^\mu)$  ein 4-Vektor ist, müssen wir diesen mit einem weiteren 4-Vektor kontrahieren, um einen Skalar unter Lorentz-Transformationen zu erhalten. Dazu bietet sich als natürlicher Kandidat das Viererpotential  $A_\mu$  an. (Die elektromagnetischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  selbst sind nicht Teil von Vierervektoren und können daher hierfür nicht verwendet werden.) Wir behaupten daher, daß die richtige Wahl für  $S_{\text{int}}$  ist

$$S_{\text{int}} = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) d\tau = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu. \quad (\text{VIII.80})$$

Damit ist die gesamte Wirkung

$$\boxed{S = -mc^2 \int_{\mathcal{P}} d\tau + \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu} \quad (\text{VIII.81})$$

Da  $S_{\text{int}}$  das Viererpotential enthält, ist dieser Term allerdings nicht eichinvariant. Eine Eichtransformation  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi$  erzeugt nämlich einen zusätzlichen Term

$$\frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} \partial_\mu \chi(x) dx^\mu = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} \frac{d\chi}{dx^\mu} dx^\mu = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} d\chi = \frac{q}{c} (\chi_2 - \chi_1), \quad (\text{VIII.82})$$

der nur von den Werten der Funktion  $\chi$  an den Endpunkten abhängt. Bei einer Variation der Wirkung, die diese Endpunkte festhält, ändert sich der zusätzliche Term nicht und trägt daher nicht zur Bewegungsgleichung bei.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Der zusätzliche Term in der Lagrangefunktion ist eine totale Zeitableitung,

$$\int_{\mathcal{P}} d\chi = \int_{\mathcal{P}} \frac{d\chi}{dt} dt. \quad (\text{VIII.83})$$

Die Wirkung können wir auch durch das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und das skalare Potential  $\varphi$  ausdrücken:

$$S = \int_{\mathcal{P}} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi \right) dt \quad (\text{VIII.84})$$

und haben damit die Lagrangefunktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi \quad (\text{VIII.85})$$

Die aus der Lagrangefunktion resultierende Bewegungsgleichung ist (siehe Übungen)

$$\frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = \frac{q}{c}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)u_\nu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \quad (\text{VIII.86})$$

wie erwartet. Die Bewegungsgleichung involviert wieder nur die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  und ist damit klarerweise eichinvariant.

Die Komponenten des kanonischen Impulses sind

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad (\text{VIII.87})$$

so daß

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_{\text{kan}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (\text{VIII.88})$$

worin wieder  $\mathbf{p}$  der kinetische Impuls ist. Die Hamiltonfunktion ist dann

$$H = v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi = \gamma mc^2 + q\varphi. \quad (\text{VIII.89})$$

Um dies durch den kanonischen Impuls  $\mathbf{P}$  auszudrücken, beobachten wir, daß nach (VIII.88) und (VIII.89)  $(H - q\varphi)$  zu  $(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})$  in derselben Relation steht wie im Fall ohne Feld, siehe (VIII.74) und (VIII.75).

$$\left( \frac{H - q\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (\text{VIII.90})$$

bzw.

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2} + q\varphi \quad (\text{VIII.91})$$

wie man auch explizit leicht überprüft.

Im nichtrelativistischen Grenzfall  $v \ll c$  finden wir, wenn wir jeweils die Ruheenergie  $E_0 = mc^2$  abziehen, die Lagrangefunktion

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi \quad (\text{VIII.92})$$

und mit

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad (\text{VIII.93})$$

die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \quad (\text{VIII.94})$$

Diese ist auch in der Quantenmechanik von sehr großer Bedeutung.

## Kapitel IX

# Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

Im aus der klassischen Mechanik der Punktteilchen bekannten Formalismus wird eine abzählbare Anzahl von Freiheitsgraden behandelt. Felder, z. B. das elektromagnetische Feld, haben aber überabzählbar viele Freiheitsgrade, im Falle der Elektrodynamik die Komponenten  $E_i$  und  $B_i$  der Felder (oder die Potentiale:  $\varphi$  und die Komponenten  $A_i$ ) an jedem Raumpunkt. Zur Beschreibung solcher Felder ist der Formalismus der **Feldtheorie** erforderlich, den wir im folgenden betrachten.

Alle modernen Theorien der fundamentalen Physik sind Feldtheorien. Die Elektrodynamik ist das wichtigste Beispiel einer klassischen Feldtheorie.

### IX.1 Lagrange-Formalismus für Felder

### IX.2 Lagrangedichte der Elektrodynamik

### IX.3 Photonmasse

# Kapitel X

## Elektrodynamik in Materie

Die bisher diskutierten Maxwell-Gleichungen gelten immer, und insbesondere natürlich in materiellen Medien. Dabei tragen alle Ladungen und Ströme in den Atomen und/oder Molekülen zu  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  bei.

Die Beschreibung aller einzelnen Ladungen und Ströme ist in materiellen Medien aber weder technisch durchführbar noch wünschenswert. Stattdessen interessieren uns bei einer makroskopischen Betrachtung eher gemittelte Eigenschaften der Materie. Die Mittelung sollte dabei über Raumbereiche stattfinden, die groß gegen die atomaren Skalen aber hinreichend klein gegen die makroskopischen Dimensionen sind. Dann erhält man makroskopisch wieder Größen, die man als kontinuierlich veränderlich ansehen kann.

Wir werden im folgenden der Einfachheit halber immer ruhende Materie betrachten.

### X.1 Materie im statischen elektrischen Feld

#### X.1.a Polarisation und dielektrische Verschiebung

Materie besteht aus Atomen und Molekülen. Diese können verschiedene Eigenschaften haben.

- Manche Moleküle haben ein permanentes elektrisches Dipolmoment, z. B.  $\text{H}_2\text{O}$ .

#### Abbildung

Im allgemeinen sind die Moleküle aber durch thermische Bewegung ungeordnet in verschiedene Richtung orientiert. Bei einem angelegten elektrischen Feld tritt aber eine Ausrichtung gegen die thermische Bewegung ein. Die Materie wird durch das Feld **polarisiert**.

- Bei Molekülen ohne permanentes Dipolmoment kann ein elektrisches Feld im allgemeinen ein Dipolmoment induzieren durch die Deformation der Elektronenhülle. Es kommt dann zu einer relativen Verschiebung der Elektronen gegen die Kerne.



Materialien mit solchen Eigenschaften nennt man **Dielektrika**. Wir betrachten deren Verhalten zunächst in elektrostatischen Feldern.

In der makroskopischen Beschreibung ersetzen wir die Verteilung der permanenten oder induzierten Dipole durch eine kontinuierliche Dipoldichte

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\overline{\Delta V}} \sum_{\substack{\text{Dipole} \\ \text{in } \overline{\Delta V}}} \mathbf{p}_i, \quad (\text{X.1})$$

worin  $\mathbf{p}_j$  die (permanenten oder induzierten) Dipolmomente der einzelnen Dipole sind und  $\overline{\Delta V}$  das Mittelungsvolumen.<sup>1</sup> Daher ist  $\mathbf{P}(\mathbf{x})\overline{\Delta V}$  das Dipolmoment des Volumens  $\overline{\Delta V}$  um den Punkt  $\mathbf{x}$ . Der Vektor  $\mathbf{P}$  heißt **dielektrische Polarisation**. Durch die dielektrische Polarisation werden an der Oberfläche jedes gegebenen Volumens Ladungen induziert.

### Abbildung

Wir bezeichnen mit  $\rho_P$  die Ladungsverteilung durch diese Polarisationsladungen.

Das Potential eines Dipols ist  $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3}$ . Für eine kontinuierliche Dipoldichte  $\mathbf{P}$  erhält man das durch die Polarisation hervorgerufene Potential

$$\begin{aligned} \varphi_P(\mathbf{x}) &= \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= - \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \operatorname{grad}_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= - \operatorname{div}_x \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (\text{X.4})$$

<sup>1</sup>Ein besseres Verfahren zur Mittelung ist die Integration mit einer Mittelungsfunktion, z. B.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2}\right), \quad \int f(\mathbf{x}) d^3x = 1, \quad (\text{X.2})$$

durch

$$\langle A \rangle(\mathbf{x}, t) = \int A(\mathbf{x}', t) f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x'. \quad (\text{X.3})$$

Wir werden hier aber die Mittelung nicht explizit ausführen, so daß diese Frage für uns nicht von großem Belang ist.

Weiter ist nach der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned}
 \rho_P(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi_P(\mathbf{x}) \\
 &= -\frac{1}{4\pi} (-1) \Delta \operatorname{div} \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
 (\Delta \operatorname{div} = \operatorname{div} \Delta) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \underbrace{\Delta_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}_{=-4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
 &= -\operatorname{div} \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
 &= -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}),
 \end{aligned} \tag{X.5}$$

d. h.

$$\boxed{\rho_P(\mathbf{x}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x})} \tag{X.6}$$

Zusätzlich kann es noch äußere Ladungen geben (die z. B. der Experimentator frei wählen kann). Deren Ladungsdichte bezeichnen wir mit  $\rho_f$  (der Index  $f$  steht für 'frei beweglich'). Die gesamte Ladungsdichte  $\rho$  ist dann

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{x}) &= \rho_f(\mathbf{x}) + \rho_P(\mathbf{x}) \\
 &= \rho_f(\mathbf{x}) - \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{X.7}$$

Aus der Maxwell-Gleichung ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= 4\pi\rho(\mathbf{x}) \\
 &= 4\pi\rho_f(\mathbf{x}) - 4\pi\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{X.8}$$

Definieren wir die **dielektrische Verschiebung**

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{x}), \tag{X.9}$$

so finden wir

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = 4\pi\rho_f(\mathbf{x})} \tag{X.10}$$

bzw. in integraler Form

$$\int_{\partial V} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) d^3x = \int_V 4\pi\rho_f d^3x. \tag{X.11}$$

Damit sind die **makroskopischen Gleichungen der Elektrostatik**

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_f} \tag{X.12}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0} \tag{X.13}$$

Natürlich ist die dielektrische Polarisation  $\mathbf{P}$  eine Funktion der Feldstärke  $\mathbf{E}$ . Für viele Substanzen gilt für nicht zu große  $\mathbf{E}$  die Proportionalität

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{x}) \tag{X.14}$$

mit der **dielektrischen Suszeptibilität**  $\chi_e$ . Damit ist

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (\text{X.15})$$

mit der (**relativen**) **Dielektrizitätskonstante**

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e. \quad (\text{X.16})$$

Im Vakuum ist  $\epsilon = 1$  und damit  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ . Für anisotrope Medien sind  $\chi_e$  und  $\epsilon$  Tensoren, für isotrope Medien dagegen Skalare. Wir werden meist homogene Medien annehmen, in denen  $\epsilon$  nicht vom Ort abhängt.

■ Man beachte, daß  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  eine Näherung ist.

Zum Beispiel gilt in Ferroelektrika  $\mathbf{P} \neq 0$  schon bei  $\mathbf{E} = 0$ .

Typische Werte für die Dielektrizitätskonstanten von Materialien sind:

	$\epsilon$
Luft	1.0006
Glas	5 - 8
H <sub>2</sub> O (flüssig)	81

### X.1.b Ladung im Dielektrikum

Für eine Punktladung im homogenen Dielektrikum erhält man

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{X.17})$$

und daraus

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \quad (\text{X.18})$$

Die elektrische Feldstärke ist also durch das polarisierbare Medium um einen Faktor  $1/\epsilon$  gegenüber dem Vakuum reduziert. Der physikalische Effekt hierbei ist die Abschirmung der Ladung durch die Polarisation des Mediums.

Abbildung

### X.1.c Kraft auf dielektrischen Körper im elektrischen Feld

Wir betrachten einen dielektrischen Körper vom Volumen  $V$  in einem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$ . Die Dipoldichte beträgt dann  $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ . Falls  $\mathbf{E}$  nur schwach veränderlich innerhalb  $V$  ist, haben wir  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 = \text{const.}$  Der induzierte Dipol des Körpers ist dann

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}_0 V = \frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) \mathbf{E} V. \quad (\text{X.19})$$

Damit ist die Kraft auf den Körper

$$\mathbf{K} = (\mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{E} V. \quad (\text{X.20})$$

Es wirkt also eine Kraft auf den Körper, falls  $\mathbf{E}$  inhomogen ist. Der dielektrische Körper wird dann in das Feld hineingezogen.

### X.1.d Grenzflächen von Dielektrika

An Grenzflächen zweier Dielektrika ist die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  stetig. Um dies zu sehen, betrachten wir eine Kurve  $\mathcal{C}$ , die auf beiden Seiten eines kleinen Stücks der Grenzfläche verläuft.

Abbildung

Wir wollen die Ausdehnung  $d$  klein machen,  $d \rightarrow 0$ , so daß nur die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  zum Integral entlang der Kurve beitragen. Wir finden dann für hinreichend kleines  $l$  (damit  $\mathbf{E}$  entlang der senkrechten Integrationswege als konstant angenommen werden kann)

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \left( E_{\text{tang}}^{(1)} - E_{\text{tang}}^{(2)} \right) l + d(\dots) = \int_{\mathcal{F}} \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 0, \quad (\text{X.21})$$

da in der Elektrostatik  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . Der Term proportional zu  $d$  verschwindet für die Wahl  $d \rightarrow 0$ , so daß

$$\boxed{E_{\text{tang}}^{(1)} = E_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.22})$$

Dieselbe Beziehung gilt auch im nicht-statischen Fall, z. B. bei elektromagnetischen Wellen an der Grenzfläche. Wenn nämlich  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , so ergibt das Flächenintegral in (X.21)

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial t} l d, \quad (\text{X.23})$$

was im Grenzwert  $d \rightarrow 0$  ebenfalls verschwindet, da die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{B}$  endlich bleibt.

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  an Grenzflächen folgt unmittelbar, daß die Tangentialkomponente von  $\mathbf{D}$  an Grenzflächen nicht stetig ist. Vielmehr gilt

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon_1} D_{\text{tang}}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_2} D_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.24})$$

Weiter finden wir, daß die Normalkomponente von  $\mathbf{D}$  stetig an Grenzflächen ist, falls sich keine freien Ladungen auf der Grenzfläche befinden. Dazu legen wir ein kleines zylindrisches Integrationsvolumen (eine sogenannte 'Gaußsche Dose') der Höhe  $d$  mit Radius  $R$  an die Grenzfläche.

Abbildung

Wir finden

$$0 = \int_V d^3x \operatorname{div} \mathbf{D} = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}, \quad (\text{X.25})$$

da keine freien Ladungsträger auf der Grenzfläche sind. (Sonst wäre dieses Integral gleich  $4\pi(\pi R^2)\sigma_f$  mit der Flächenladungsdichte  $\sigma_f$  der freien Ladungen an der Grenzfläche.) Für  $d \rightarrow 0$  tragen nur die Normalkomponenten von  $\mathbf{D}$  zum Flächenintegral bei:

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = \pi R^2 \left( D_n^{(2)} - D_n^{(1)} \right), \quad (\text{X.26})$$

und daher haben wir

$$\boxed{D_n^{(1)} = D_n^{(2)}} \quad (\text{X.27})$$

Hieraus folgt, daß die Normalkomponente von  $\mathbf{E}$  nicht stetig ist, sondern

$$\boxed{\epsilon_1 E_n^{(1)} = \epsilon_2 E_n^{(2)}} \quad (\text{X.28})$$

Damit ergibt sich an einer Grenzfläche folgendes Bild, wenn  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ :

#### Abbildung

Man erhält aus der Stetigkeit von  $E_{\text{tang}}$

$$\left| \mathbf{E}^{(1)} \right| \sin \alpha_1 = \left| \mathbf{E}^{(2)} \right| \sin \alpha_2, \quad (\text{X.29})$$

und aus der Stetigkeit von  $D_n$

$$\left| \mathbf{D}^{(1)} \right| \cos \alpha_1 = \left| \mathbf{D}^{(2)} \right| \cos \alpha_2, \quad (\text{X.30})$$

und aus deren Verhältnis, da  $\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon_i \mathbf{E}^{(i)}$  für  $i = 1, 2$ ,

$$\frac{\tan \alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\epsilon_2}. \quad (\text{X.31})$$

Man beachte, daß  $\mathbf{D}$  an Grenzflächen quellenfrei ist, denn nur freibewegliche Ladungen sind Quellen für  $\mathbf{D}$ . Quellen für  $\mathbf{E}$  sind dagegen *alle* Ladungen, insbesondere auch durch die Polarisation induzierte Ladungen an der Grenzschicht.

Die Feldlinien werden beim Eintritt in ein Medium mit größerem  $\epsilon$  von der Normalen weg 'gebrochen'. (Beachte, daß dies gerade entgegengesetzt zum Verhalten bei der Lichtbrechung ist.) Da an der Grenzfläche Polarisationsladungen sind, also Quellen für  $\mathbf{E}$ , ändert sich die Dichte der Feldlinien von  $\mathbf{E}$  an der Grenzfläche. Die Dichte der Feldlinien von  $\mathbf{D}$  bleibt dagegen an der Grenzfläche unverändert.

#### Abbildung

## X.2 Materie im statischen magnetischen Feld

### X.2.a Magnetisierung und magnetische Feldstärke

In vielen Stoffen entsteht in einem magnetischen Feld eine magnetische Dipolverteilung – ganz analog zur dielektrischen Polarisierung.

Die Dipolverteilung wird durch die Dipoldichte  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  beschrieben, die man **Magnetisierung** nennt. Analog zur dielektrischen Polarisierung ist sie durch eine Mittelung über kleine Volumina definiert,

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\overline{\Delta V}} \sum_{\substack{\text{Dipole} \\ \text{in } \overline{\Delta V}}} \mathbf{m}_i \quad (\text{X.32})$$

mit dem Mittelungsvolumen  $\overline{\Delta V}$ . Dann ist  $\mathbf{M}(\mathbf{x})\overline{\Delta V}$  das magnetische Dipolmoment des Volumens  $\overline{\Delta V}$  um den Punkt  $\mathbf{x}$ .

Es gibt im wesentlichen die folgenden Klassen von Materialien:

- Bei **paramagnetischen** Stoffen stellen die Moleküle kleine magnetische Dipole dar, die ohne äußeres Magnetfeld infolge thermischer Bewegung regellos orientiert sind. Bei Anlegen eines äußeren Feldes werden die Dipole entgegen der thermischen Bewegung bevorzugt in Feldrichtung orientiert, so daß  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{B}$ .
- Bei **diamagnetischen** Stoffen haben die Moleküle kein permanentes Dipolmoment. Bei Anlegen eines Magnetfeldes entstehen Induktionsströme, die zu *induzierten* magnetischen Dipolmomenten führen.
- Eine separate Klasse sind **Ferromagneten**, bei denen auch *ohne* äußeres Magnetfeld eine Magnetisierung vorliegt.

In allen Fällen sind 'innere Ströme' die Ursache der Magnetisierung. Die ursprüngliche Ampèresche Hypothese der 'Molekularströme' ist allerdings nicht ganz richtig, da auch die Spins (und damit quantenmechanische Effekte) zur Magnetisierung beitragen.

Wir teilen die Stromdichte in Materie auf in die **Magnetisierungsstromdichte**  $\mathbf{j}_M$  und die **freibewegliche Stromdichte**  $\mathbf{j}_f$ , die die äußeren Ströme darstellt,

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_M(\mathbf{x}). \quad (\text{X.33})$$

Das Vektorpotential eines magnetischen Dipols ist

$$\mathbf{A}_{\text{Dip}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3}. \quad (\text{X.34})$$

Also ist für eine kontinuierliche Dipoldichte  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_M(\mathbf{x}) &= \int d^3x' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \text{grad}_{x'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \text{part. Int.} &= \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \text{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (\text{X.35})$$

Das Vektorpotential für den gesamten Strom  $\mathbf{j}$ , also für  $\mathbf{j}_f$  zusammen mit  $\mathbf{M}$  ist

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_{\mathbf{j}_f} + \mathbf{A}_M \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \operatorname{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}') \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\mathbf{j}_f(\mathbf{x}') + c \operatorname{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}')] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{j}(\mathbf{x}'),
 \end{aligned} \tag{X.36}$$

worin die letzte Zeile das bekannte Vektorpotential für den gesamten Strom  $\mathbf{j}$  ist. Durch Vergleich der letzten beiden Zeilen finden wir, daß

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{x}) = c \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{x}). \tag{X.37}$$

Einsetzen in die Maxwell-Gleichung für  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f(\mathbf{x}) + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{x}). \tag{X.38}$$

Wir definieren daher die **magnetische Feldstärke**  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  als

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{x}) \tag{X.39}$$

und erhalten damit die **makroskopischen Gleichungen der Magnetostatik**

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f \tag{X.40}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{X.41}$$

Die zweite dieser Gleichungen, die die Abwesenheit von magnetischen Monopolen besagt, gilt natürlich unverändert weiter.

Die Magnetisierung ist eine Funktion von  $\mathbf{B}$ . Im allgemeinen ist diese Abhängigkeit kompliziert, sie hängt bei manchen Stoffen sogar von den Umständen in der Vergangenheit ab (z. B. bei Ferromagneten, wo der Effekt der Hysterese auftritt). Weil  $\mathbf{M}$  die Relation zwischen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  bestimmt, gilt dies im allgemeinen auch für  $\mathbf{H}$ .

Für viele Stoffe gilt bei nicht zu großen Feldstärken näherungsweise die Proportionalität

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \tag{X.42}$$

mit der **relativen Permeabilität**  $\mu$ . Damit ist

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} - \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1) \mathbf{H} =: \chi_m \mathbf{H}. \tag{X.43}$$

Man bezeichnet  $\chi_m$  als **magnetische Suszeptibilität**. Es gilt

$$\mu = 1 + 4\pi \chi_m. \tag{X.44}$$

Im Vakuum gilt  $\mu = 1$  und  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ . Es ist

$$\begin{aligned}
 \chi_m > 0 & \quad \text{für paramagnetische Stoffe} \\
 \chi_m < 0 & \quad \text{für diamagnetische Stoffe}
 \end{aligned} \tag{X.45}$$

Typische Werte sind z. B.

	$\chi_m$
Wasserstoff	$-0.20 \cdot 10^{-9}$
Wasser	$-0.72 \cdot 10^{-6}$
Sauerstoff	$+0.14 \cdot 10^{-6}$

In Abwesenheit von freien Ladungen und freien Strömen weisen die makroskopischen Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik eine gewisse Symmetrie auf. Es besteht nämlich eine (mathematische) Analogie zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$ , sowie zwischen  $\epsilon$  und  $\mu$ . (Diese wird auch von der unglücklichen Wahl des Namens 'Feldstärke' für  $\mathbf{H}$  reflektiert.) Es ist jedoch zu beachten, daß die physikalische Analogie zwischen den Feldern  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , zwischen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$ , sowie zwischen  $\epsilon$  und  $1/\mu$  besteht. Es sind nämlich die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , die sich jeweils aus allen mikroskopischen Ladungen bzw. allen mikroskopischen Strömen ergeben. In  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  sind dagegen die Polarisationsladungen bzw. Magnetisierungsströme implizit berücksichtigt.

### X.2.b Magnetische Felder an Grenzflächen

Analog zu den Betrachtungen des Verhaltens von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  an Grenzflächen von Dielektrika kann man das Verhalten von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  an Grenzflächen zwischen Materialien verschiedener Permeabilitäten untersuchen (siehe Übungen).

Man findet, daß an Grenzflächen von Materialien mit verschiedenen Permeabilitäten:

- Die Normalkomponenten von  $\mathbf{B}$  stetig sind,

$$\boxed{B_n^{(1)} = B_n^{(2)}} \quad (\text{X.46})$$

und damit die Normalkomponenten von  $\mathbf{H}$  unstetig,

$$\boxed{\mu_1 H_n^{(1)} = \mu_2 H_n^{(2)}} \quad (\text{X.47})$$

- In Abwesenheit von Leitungsströmen sind die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{H}$  an der Grenzfläche stetig,

$$\boxed{H_{\text{tang}}^{(1)} = H_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.48})$$

und damit die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{B}$  unstetig,

$$\boxed{\frac{1}{\mu_1} B_{\text{tang}}^{(1)} = \frac{1}{\mu_2} B_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.49})$$

Beim Übergang von einem Medium mit Permeabilität  $\mu_1$  zu einem mit  $\mu_2$  werden bei  $\mu_1 < \mu_2$  die Feldlinien von der Normalen weg 'gebrochen'.

Abbildung



### X.2.c Ferromagnetismus

Bei ferromagnetischen Materialien treten typische Suszeptibilitäten von  $\chi_m \simeq 10^3$  auf. Die Magnetisierung  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  hängt von der Vorgeschichte des Materials ab, was sich im Phänomen der **Hysterese** manifestiert. Bei großen magnetischen Feldstärken tritt typischerweise eine Sättigung der Magnetisierung auf.

Abbildung

Die vollständige Erklärung des Ferromagnetismus kann erst im Rahmen der Quantenmechanik gegeben werden, da hier die Ausrichtung der Spins im Material eine entscheidende Rolle spielt. Der Spin ist aber ein reiner Quanteneffekt.

## X.3 Elektrische Leiter

In elektrischen Leitern bewirkt ein elektrisches Feld einen Strom in Richtung des Feldes. In vielen Leitern – sogenannten **Ohmschen Leitern** – ist die Stromdichte dem Feld proportional. Dann gilt das **Ohmsche Gesetz**

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad (\text{X.50})$$

worin  $\sigma$  die **elektrische Leitfähigkeit** ist, die vom Material abhängt. Ihr Kehrwert

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})} \quad (\text{X.51})$$

heißt **spezifischer elektrischer Widerstand**. Für  $\sigma \rightarrow 0$  erhält man einen **Isolator**, d. h.  $\mathbf{j} = 0$ ; für  $\sigma \rightarrow \infty$  einen **idealen Leiter**, d. h.  $\mathbf{E} = 0$ .

Das 'normale' Ohmsche Gesetz erhält man z. B. für einen homogenen Leiter (d. h.  $\sigma(\mathbf{x}) = \text{const.}$ ) der Länge  $l$  mit konstantem Querschnitt  $F$

Abbildung

als

$$I = |\mathbf{j}|F = \sigma|\mathbf{E}|F = \frac{\sigma F}{l} U = \frac{1}{R} U \quad (\text{X.52})$$

mit dem elektrischen Widerstand

$$R = \frac{l}{\sigma F}. \quad (\text{X.53})$$

Während  $\sigma$  eine Materialkonstante ist, hängt  $R$  von der Geometrie des Leiters ab. Die Leistung im Leiter ist

$$P = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (\text{X.54})$$

d. h. für den obigen Fall (wobei wir den Weg  $\mathcal{C}$  entlang des Leiters legen)

$$P = I \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = IU = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (\text{X.55})$$

Im Inneren von Leitern sind Ladungsverteilungen aus freibeweglichen Ladungsträgern instabil und zerfallen in sehr kurzer Zeit, abhängig von der Leitfähigkeit (siehe Übungen). Bei Metallen liegt die Zerfallszeit im Bereich von  $10^{-18}$  sec.

Im allgemeinen hängt die Leitfähigkeit  $\sigma$  von der Frequenz des Feldes ab, was bei elektromagnetischen Wellen sehr wichtig wird. Bei der Fourier-Zerlegung von  $\mathbf{E}(t)$  und  $\mathbf{j}(t)$ ,

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\omega) d\omega \quad (\text{X.56})$$

$$\mathbf{j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \mathbf{j}(\omega) d\omega \quad (\text{X.57})$$

wird das Ohmsche Gesetz im Fourierraum

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (\text{X.58})$$

Dabei bezeichnet  $\sigma(\omega)$  die Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit, nicht die Fouriertransformierte.<sup>2</sup>

Wesentliche Eigenschaften von  $\sigma(\omega)$  kann man im einfachen **Drude-Modell** der elektrischen Leitung verstehen, das wir hier für stationäre Ströme betrachten. Dabei werden die freien Ladungsträger im Leiter durch das Feld  $\mathbf{E}$  beschleunigt, stoßen aber im Mittel nach einer typischen Zeit  $\tau$ , der sogenannten Relaxationszeit, mit einem Atom zusammen und werden dadurch abgebremst. Die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger hat daher im Mittel einen solchen Verlauf:

#### Abbildung

Es kann sich dann ein stationärer Strom einstellen, und der spezifische Widerstand bzw. der ihm entsprechende Energieverlust wird durch die Stöße verursacht. Man findet, daß in diesem Modell die (stationäre) Leitfähigkeit  $\sigma_0$  gegeben ist durch

$$\sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}, \quad (\text{X.59})$$

wobei  $n_0$  die Dichte freier Ladungsträger,  $e$  ihre Ladung, und  $m$  ihre Masse ist. Für Kupfer schätzt man z. B. ab, daß  $\tau \simeq 10^{-14}$  sec.

Aus diesem einfachen Modell kann man schon qualitativ das Verhalten von  $\sigma$  als Funktion der Frequenz des elektrischen Feldes erschließen: Bei hohen Frequenzen ändern die Ladungsträger schnell ihre Richtung. Falls  $\omega \gg 1/\tau$ , geschieht dies typischerweise, bevor es zu einem Stoß kommt. Daher wird bei hohen Frequenzen der Leiter für elektromagnetische Wellen transparent. Wir finden also:

<sup>2</sup>Dies ist eine in diesem Kontext vielleicht verwirrende, aber übliche Notation.

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ : Dämpfung durch Stöße, Absorption für niedrige Frequenzen
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ : weniger Stöße und daher keine Dämpfung, Transparenz für hohe Frequenzen

Das Drude-Modell gibt eine klassische Beschreibung des Ladungstransports. Tatsächlich spielen aber eine Reihe von quantenmechanischen Effekten in Festkörpern eine große Rolle, die nicht in diesem Modell abgebildet sind. Daher ist die Vorhersagekraft dieses einfachen Modells auf einige qualitative Merkmale der Leitfähigkeit beschränkt.

## X.4 Maxwell-Gleichungen in Materie

Wir wollen auch die Maxwell-Gleichungen so schreiben, daß die mikroskopischen Eigenschaften durch gemittelte Größen ersetzt werden, nämlich mit Hilfe der oben eingeführten Felder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$ .

Dazu zerlegen wir die Ladungsdichte gemäß

$$\rho = \rho_f + \rho_P, \quad (\text{X.60})$$

worin  $\rho_f$  die Dichte freibeweglicher Ladungen und  $\rho_P$  die Dichte der Polarisationsladungen bezeichnet. Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  zerlegen wir gemäß

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M. \quad (\text{X.61})$$

Darin ist  $\mathbf{j}_f$  die freibewegliche Stromdichte und  $\mathbf{j}_M$  die Magnetisierungsstromdichte. Zusätzlich haben wir die **Polarisierungsstromdichte**  $\mathbf{j}_P$ , denn beim Vorgang der Polarisierung kommt es zu einem Strom, da Ladungen in den Molekülen gegeneinander verschoben werden. (Für statische Felder brauchen wir  $\mathbf{j}_P$  offenbar nicht.) Bei ruhender Materie, die wir hier immer annehmen, ist

$$\mathbf{P} \overline{\Delta V} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i q_i \mathbf{a}_i \quad (\text{X.62})$$

für Dipole  $\mathbf{p}_i$  aus Ladungen  $\pm q_i$  im Abstand  $\mathbf{a}_i$ , und

$$\mathbf{j}_P \overline{\Delta V} = \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}_i = \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a}_i. \quad (\text{X.63})$$

Daher gilt

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}. \quad (\text{X.64})$$

Wir hatten weiter

$$\mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (\text{X.65})$$

Es gelten die Kontinuitätsgleichungen

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_f = 0, \quad (\text{X.66})$$

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_P = 0, \quad (\text{X.67})$$

und es ist wegen (X.65)

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_M = 0. \quad (\text{X.68})$$

Einsetzen obiger Relationen in die Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{X.69})$$

ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \right), \quad (\text{X.70})$$

woraus wir erhalten

$$\operatorname{rot} \underbrace{(\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M})}_{=\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P})}_{=\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f. \quad (\text{X.71})$$

Damit haben wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f. \quad (\text{X.72})$$

Weiter folgt, wie gehabt, aus  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_f. \quad (\text{X.73})$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen bleiben in Materie unverändert. Damit haben wir also die **Maxwell-Gleichungen in Materie** oder **makroskopischen Maxwell-Gleichungen** gefunden:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_f \quad (\text{X.74})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{X.75})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{X.76})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{X.77})$$

Sie gelten für *ruhende* Materie.

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen werden ergänzt durch Materialgleichungen, z. B. für viele Materialien durch die linearen Gleichungen  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  und das Ohmsche Gesetz  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  für elektrische Leiter.

## X.5 Elektromagnetische Wellen in Materie

Wir wollen hier homogene, isotrope Medien betrachten, die durch  $\epsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  charakterisiert sind. Es seien keine äußeren Ladungen vorhanden,  $\rho_f = 0$ .

### X.5.a Telegraphengleichung

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen und den linearen Materialgleichungen  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}$  kann man die **Telegraphengleichung** herleiten (siehe Übungen):

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{X.78})$$

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{X.79})$$

Dabei handelt es sich um Wellengleichungen mit einem Dämpfungsterm. Durch diesen Term, der linear in der Zeitableitung ist, wird die Zeitumkehrinvarianz verletzt. Er führt bei leitenden Medien zu einem Energieverlust der Welle.

Natürlich kann man auch hier wieder Wellengleichungen für die Potentiale  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  herleiten statt direkt für die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ .

Die Telegraphengleichungen lassen sich durch ebene Wellen lösen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß im allgemeinen  $\epsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  von der Frequenz abhängen, d. h.  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ,  $\mu = \mu(\omega)$ ,  $\sigma = \sigma(\omega)$ .

### X.5.b Elektromagnetische Wellen in Isolatoren

In ungeladenen Isolatoren ( $\rho_f = 0$ ) haben wir  $\sigma = 0$  und wir erhalten aus den Telegraphengleichungen die ungedämpften Wellengleichungen

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{X.80})$$

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0. \quad (\text{X.81})$$

Diese können wir durch ebenen Wellen lösen,<sup>3</sup>

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (\text{X.82})$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt die Bedingung

$$|\mathbf{k}| = k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (\text{X.83})$$

Es tritt jetzt statt  $c$  die Phasengeschwindigkeit

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (\text{X.84})$$

auf. Wir bezeichnen

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (\text{X.85})$$

als **optischen Brechungsindex** des Mediums. In den meisten Medien ist  $\mu \simeq 1$ , so daß dann  $n \simeq \sqrt{\epsilon}$ .

Wir finden also, daß in einem Dielektrikum die Phasengeschwindigkeit der ebenen elektromagnetischen Wellen gemäß

$$v_{\text{Ph}} = \frac{c}{n} \quad (\text{X.86})$$

verändert ist. Die Wellenlänge hängt mit derjenigen im Vakuum,  $\lambda_0$ , zusammen gemäß

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (\text{X.87})$$

Die Wellen sind wie im Vakuum transversal, d. h.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{X.88})$$

<sup>3</sup>  $\boldsymbol{\epsilon}$  ist hier natürlich der Polarisationsvektor und hat nichts mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  zu tun.

und  $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  bilden ein rechtshändiges System.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  haben aber im Medium verschiedene Beträge,

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{\epsilon\mu} |\mathbf{E}|, \quad (\text{X.89})$$

wie man aus der Maxwell-Gleichung (X.76) herleitet.

Aus den Stetigkeitsbedingungen der transversalen bzw. normalen Komponenten der Felder  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$  leitet man für ebene Wellen die bekannten Gesetze der optischen Brechung und Reflexion an Grenzflächen zwischen verschiedenen Dielektrika her (siehe Übungen).

### X.5.c Dispersion

In der Relation  $\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu$  sind im allgemeinen  $\epsilon$  und  $\mu$  Funktionen von  $\omega$ , also  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ,  $\mu = \mu(\omega)$ . (Ein wichtiges Beispiel ist komplexwertiges  $\epsilon$ , siehe unten.) Allgemein bezeichnet man den Zusammenhang<sup>4</sup> zwischen  $\omega$  und  $\mathbf{k}$ ,

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = \omega(k) \quad (\text{X.90})$$

als **Dispersionsrelation**. (Die letzte Gleichung gilt für isotrope Medien.) Wenn  $\epsilon = \epsilon(\omega)$  nicht konstant ist, spricht man von einem **dispersiven Medium**. (Da meistens  $\mu \simeq 1$ , spielt dabei  $\mu$  keine Rolle.)

Wir betrachten nun der Einfachheit halber Wellen in einer Dimension. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung erhält man durch Überlagerung ebener Wellen,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]}, \quad (\text{X.91})$$

was man als **Wellenpaket** bezeichnet. Sei nun  $A(k)$  um  $k = k_0$  zentriert:

Abbildung

Man kann  $\omega(k)$  um  $k_0$  entwickeln:

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \dots \\ &=: \omega_0 + (k - k_0)v_g + \dots, \end{aligned} \quad (\text{X.92})$$

wobei

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (\text{X.93})$$

**Gruppengeschwindigkeit** heißt. Mit dieser linearen Näherung (X.92) erhalten wir für das Wellenpaket

$$\begin{aligned} u(x, t) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i[kx - \omega_0 t - (k - k_0)v_g t]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega_0 - k_0 v_g)t} \int dk A(k) e^{ik(x - v_g t)} \end{aligned} \quad (\text{X.94})$$

<sup>4</sup>Falls sich  $\omega$  nicht als eindeutige Funktion von  $\mathbf{k}$  schreiben läßt, hat man noch allgemeiner die Dispersionsrelation  $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$  mit einer Funktion  $f$ , die vom Medium abhängt.

und damit für die Intensität der Welle

$$|u(x, t)|^2 = |u(x - v_g t)|^2, \quad (\text{X.95})$$

d. h. der Puls (die 'Wellengruppe') bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v_g$  fort. In der linearen Näherung für  $\omega(k)$  ändert der Puls seine Form nicht.

Wenn mit der Dichte der Welle Energie assoziiert ist, wird auch diese mit der Gruppengeschwindigkeit transportiert. Die Gruppengeschwindigkeit – und *nicht* die Phasengeschwindigkeit – ist daher diejenige Geschwindigkeit, mit der Energie und Information übertragen werden.

Für Lichtwellen ist

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)}. \quad (\text{X.96})$$

Die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)} \quad (\text{X.97})$$

ist im allgemeinen von der Gruppengeschwindigkeit verschieden! Der Fall  $v_{\text{Ph}} > c$  (d. h.  $n < 1$ ) tritt in realen Medien durchaus auf, z. B. in Wasser bei einer Frequenz von  $\nu \simeq 10^{16}$  Hz.

In typischen Medien steigt in den meisten Frequenzbereichen der Brechungsindex mit der Frequenz an,

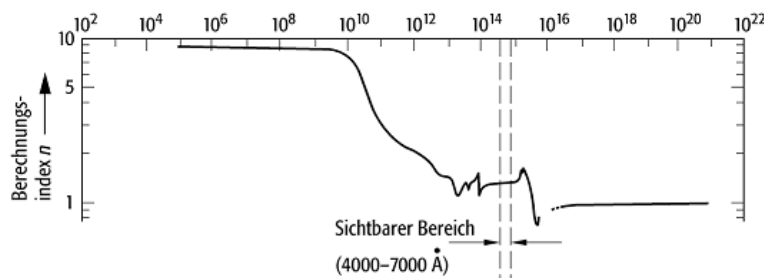
$$\frac{dn}{d\omega} > 0 \quad \text{'normale Dispersion'}. \quad (\text{X.98})$$

Es gibt aber auch (vor allem in der Nähe von sogenannten Resonanzen, d. h. bestimmten Polen in der Funktion  $\epsilon(\omega)$  in der komplexen  $\omega$ -Ebene, wo starke Absorption auftritt) den Fall anomaler Dispersion,

$$\frac{dn}{d\omega} < 0 \quad \text{'anomale Dispersion'}. \quad (\text{X.99})$$

Meist benutzt man diese Begriffe für den sichtbaren Teil des elektromagnetischen Spektrums.

Als Beispiel für die Vielfalt der Phänomene, die beim Brechungsindex auftreten können, zeigen wir die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Frequenz  $\nu = \omega/(2\pi)$  für Wasser:



Bei geringer Frequenz ist wie im statischen Fall  $\epsilon = 81$  und  $n = 9$ . Im sichtbaren Bereich ist  $n \simeq 1.3$ .

Es gibt Materialien, in denen in bestimmten Bereichen (insbesondere nahe Resonanzen)  $v_g > c$ . Allerdings ist dann die Taylor-Entwicklung (X.92) keine gute Näherung, und obige Definition von  $v_g$  ist nicht sinnvoll. Man kann ganz allgemein zeigen (z. B. unter Verwendung der notwendigen analytischen Eigenschaften von  $A(\omega)$  in der komplexen  $\omega$ -Ebene), daß Signalübertragung in dispersiven Medien *nie* mit Geschwindigkeiten größer als  $c$  erfolgen kann.

Geht man über die lineare Näherung in (X.92) hinaus, wird  $v_g$  die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Wellenpakets. Für eine nichtlineare Dispersionsrelation, die in den meisten Medien vorliegt, verbreitert sich dann das Wellenpaket während der Propagation: es dispergiert.

#### Abbildung

Ein ähnlicher Effekt ist in der Quantenmechanik sehr wichtig.

#### X.5.d Elektromagnetische Wellen in Leitern

In Leitern ist  $\sigma \neq 0$ , und damit ist der Dämpfungsterm in den Telegraphengleichungen

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{X.100})$$

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{X.101})$$

relevant. Die Gleichungen können wieder durch ebene Wellen gelöst werden, z. B. für  $\mathbf{E}$  (für  $\mathbf{B}$  findet man eine analoge Lösung)

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \quad (\text{X.102})$$

Einsetzen in die Telegraphengleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \left[ -\mathbf{k}^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} (-i\omega)^2 - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma (-i\omega) \right] \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} &= 0 \\ \implies \mathbf{k}^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2 - i \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \omega &= 0, \end{aligned} \quad (\text{X.103})$$

und damit

$$\mathbf{k}^2 = \left( \epsilon\mu + i \frac{4\pi\mu\sigma}{\omega} \right) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{X.104})$$

Man bezeichnet naheliegenderweise

$$n = \sqrt{\epsilon\mu + i \frac{4\pi\mu\sigma}{\omega}} \quad (\text{X.105})$$

als **verallgemeinerten Brechungsindex** und schreibt dessen Real- und Imaginärteil als

$$n = n_{\text{R}} + i n_{\text{I}}. \quad (\text{X.106})$$

Der verallgemeinerte Brechungsindex ist eine Funktion der Frequenz,  $n = n(\omega)$ , denn  $\epsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  hängen von  $\omega$  ab.

Für die meisten Materialien ist  $\mu \simeq 1$ , so daß wir nähern können

$$n = \sqrt{\epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}}. \quad (\text{X.107})$$



Man kann nun die bekannten Ergebnisse für Isolatoren verwenden, indem man in diesen  $\epsilon$  durch eine **komplexe Dielektrizitätskonstante** ersetzt:

$$\epsilon \longrightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}, \quad (\text{X.108})$$

worin  $\sigma = \sigma(\omega)$ . Damit ist

$$n = \sqrt{\epsilon(\omega)}. \quad (\text{X.109})$$

Mit  $k = n\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c}(n_{\text{R}} + in_{\text{I}})$  wird, wenn wir  $\mathbf{k}$  in  $z$ -Richtung wählen,

$$\mathbf{E} = \epsilon e^{i(kz - \omega t)} = \epsilon e^{[\frac{\omega}{c}(n_{\text{R}} + in_{\text{I}})z - \omega t]} = \epsilon e^{i\omega(n_{\text{R}}\frac{z}{c} - t)} e^{-n_{\text{I}}\frac{\omega z}{c}}, \quad (\text{X.110})$$

so daß

$$\text{Re } \mathbf{E} = \text{Re} \left[ \epsilon e^{i\omega(n_{\text{R}}\frac{z}{c} - t)} \right] e^{-n_{\text{I}}\frac{\omega z}{c}}, \quad (\text{X.111})$$

und analog für  $\mathbf{B}$ . Der letzte Faktor bewirkt eine Dämpfung der Amplitude. Die Amplitude fällt also auf der Strecke

$$d = \frac{c}{\omega n_{\text{I}}} \quad (\text{X.112})$$

auf das  $1/e$ -fache ab. Diese Strecke nennt man die **Eindringtiefe**.

Aus dem Drude-Modell der elektrischen Leitung (und daran anschließende Überlegungen) kann man herleiten daß

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad (\text{X.113})$$

mit  $\sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$  (siehe (X.59)). Damit ist also

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega(1 - i\omega\tau)}. \quad (\text{X.114})$$

- Bei kleinen Frequenzen  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$  ist

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \simeq \sqrt{-\frac{4\pi\sigma_0}{i\omega}} = (1 + i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} \quad (\text{X.115})$$

und daher

$$n_{\text{R}} = n_{\text{I}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}}, \quad (\text{X.116})$$

so daß für die Eindringtiefe gilt

$$d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}}. \quad (\text{X.117})$$

Zum Beispiel ist für Kupfer

$$\sigma_0(\text{Cu}) = 5.8 \cdot 10^{17} \text{ sec}^{-1}. \quad (\text{X.118})$$

Man findet also in diesem Fall beispielsweise

$$\begin{aligned} \omega = 2\pi \cdot 50 \text{ sec}^{-1} &\implies d = 0.9 \text{ cm} \\ \omega = 2\pi \cdot 10^9 \text{ sec}^{-1} &\implies d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}. \end{aligned} \quad (\text{X.119})$$

Feld und Stromdichte dringen daher nur in die äußerste Schicht des Leiters ein. Dies bezeichnet man als **Skin-Effekt**.

- Bei hohen Frequenzen  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$  ist dagegen

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega^2} = \epsilon \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right) \quad (\text{X.120})$$

mit der **Plasmafrequenz**<sup>5</sup>

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{\epsilon m}}. \quad (\text{X.121})$$

Für  $\omega < \omega_P$  ist  $\epsilon(\omega) < 0$ , d. h.

$$n_R = 0 \quad \text{und} \quad n_I = \sqrt{\epsilon \left(\frac{\omega_P^2}{\omega} - 1\right)}, \quad (\text{X.122})$$

was zum exponentiellen Abfall der Welle führt. Die Welle wird daher vollständig reflektiert! Für  $\omega < \omega_P$  tritt also **Reflexion** ein.

Für  $\omega > \omega_P$  ist  $\epsilon(\omega) > 0$  und damit

$$n_R = \sqrt{\epsilon \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega}\right)} \quad \text{und} \quad n_I = 0. \quad (\text{X.123})$$

Der Leiter wird demzufolge durchsichtig, für  $\omega > \omega_P$  tritt also **Transparenz** auf.

Betrachten wir als Beispiel wieder Kupfer. Hier ist die Plasmafrequenz

$$\omega_P(\text{Cu}) = 1.6 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1}. \quad (\text{X.124})$$

Für sichtbares Licht, also für  $\omega = 2.4 - 5.2 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ , ist Kupfer undurchsichtig. Fast alle Metalle haben eine Plasmafrequenz im Ultravioletten und reflektieren daher Licht.<sup>6</sup>

In Elektrolyten (und damit in vielen Salzen) ist typischerweise die Ladungsträgerdichte  $n_0$  kleiner und die Ladungsträgermasse  $m$  höher. Daher ist hier  $\omega_P$  kleiner, so daß Elektrolyte in der Regel durchsichtig sind.

### X.5.e Kramers-Kronig-Relationen\*

<sup>5</sup>Diese spielt auch als Eigenfrequenz bei Plasmaoszillationen eine Rolle, was ihren Namen erklärt.

<sup>6</sup>Die Farben von Kupfer und Gold erklären sich aus Interband-Übergängen und *nicht* aus einer Plasmafrequenz im sichtbaren Bereich.

# Kapitel XI

## Energie- und Impulssatz für das elektromagnetische Feld

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie die aus der Mechanik bekannte Energie- und Impulserhaltung im Falle der Elektrodynamik formuliert werden kann. Dabei wird sich zeigen, daß das elektromagnetische Feld selbst Energie und Impuls tragen kann.

### XI.1 Energiesatz der Elektrodynamik

Wir wollen im folgenden sehen, wie die an Ladungen geleistete Arbeit mit der im elektromagnetischen Feld enthaltenen Energie zusammenhängt. Wir gehen dazu von der Lorentzkraft aus,

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{XI.1})$$

oder

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} d^3x = \int \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) d^3x. \quad (\text{XI.2})$$

Die pro Zeiteinheit vom Feld an einer Punktladung geleistete Arbeit ist

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dt, \quad (\text{XI.3})$$

da wegen  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$  das magnetische Feld keine Arbeit leistet (siehe auch Übungen). Für eine Ladungs- und Stromverteilung im Volumen  $V$  haben wir daher

$$dW = \left( \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x \right) dt \quad (\text{XI.4})$$

und die Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (\text{XI.5})$$

Wir nehmen an, daß das Volumen  $V$  Teil eines abgeschlossenen Systems sei, in dem die Ladungen und Ströme nur untereinander wechselwirken. Es sollen also keine weiteren äußeren Kräfte auf die Teilchen einwirken. Außerdem soll die Stromdichte Folge der Bewegung von

Ladungen sein. Wir werden Ladungen und Ströme in Materie betrachten, die entsprechenden Beziehungen im Vakuum kann man daraus leicht erhalten.

Wir haben

$$\mathbf{j}_f = \frac{c}{4\pi} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (\text{XI.6})$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int_V \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} d^3x = \frac{c}{4\pi} \int_V \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} d^3x \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - c \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) d^3x, \end{aligned} \quad (\text{XI.7})$$

und für den zweiten Beitrag hierin erhalten wir durch partielle Integration und unter Verwendung von  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\begin{aligned} c \int (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} d^3x &= c \int_{\partial V} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} + c \int_V \mathbf{H} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{E}) d^3x \\ &= c \int_{\partial V} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} - \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d^3x. \end{aligned} \quad (\text{XI.8})$$

Damit erhalten wir

$$\int_V \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} d^3x = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3x - \frac{c}{4\pi} \int_{\partial V} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{XI.9})$$

Nehmen wir nun an, daß  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  (was in vielen Materialien aber nicht immer gilt, wie wir oben gesehen haben), so ist

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}). \quad (\text{XI.10})$$

Analog findet man

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \quad (\text{XI.11})$$

Damit ergibt sich für das Negative der vom Feld an den Ladungen verrichteten Arbeit

$$\boxed{-\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d^3x \right\} + \frac{c}{4\pi} \int_{\partial V} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{f}.} \quad (\text{XI.12})$$

Das Negative der vom Feld an den Ladungen geleisteten Arbeit setzt sich also zusammen aus

(a) einer Zunahme der **Feldenergie**  $U$  im Volumen  $V$ ,

$$U = \int_V u d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d^3x \quad (\text{XI.13})$$

mit der **Energiedichte**

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{XI.14})$$

des Feldes, und

- (b) aus dem Volumen  $V$  austretender Feldenergie, dargestellt durch den **Energieströmungsvektor** oder **Poynting-Vektor**

$$\mathbf{S} := \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (\text{XI.15})$$

Der Poynting-Vektor hat die Einheit  $[\mathbf{S}] = \text{Energie}/(\text{Fläche} \cdot \text{Zeit})$ .

Anders ausgedrückt, kann die Feldenergie  $U$  im Volumen  $V$  abnehmen durch an den Ladungen verrichtete Arbeit  $W$  und/oder durch einen vom Feld getragenen Energiefluß aus dem Volumen heraus.

Mit diesen Größen haben wir also den **Energiesatz**

$$-\int_V \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} d^3x = \frac{dU}{dt} + \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{XI.16})$$

Mit dem Gaußschen Satz können wir schreiben

$$-\int_V \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_V \left( \frac{du}{dt} + \text{div } \mathbf{S} \right) d^3x, \quad (\text{XI.17})$$

und erhalten dann den Energiesatz in differentieller Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = -\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} \quad (\text{XI.18})$$

Falls keine Arbeit an Ladungen verrichtet wird (z. B. wenn im Volumen  $V$  keine Ladungen vorhanden sind) ist also

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = 0 \quad \text{falls} \quad \frac{dW}{dt} = 0, \quad (\text{XI.19})$$

was eine zur Kontinuitätsgleichung analoge Form hat.

Die im Vakuum gültige Form des Energiesatzes erhält man aus obigen Formeln einfach durch die Ersetzung  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}_f \rightarrow \mathbf{j}$ .

Es ist zu beachten, daß die Interpretation des Vektors  $\mathbf{S}$  einige Vorsicht erfordert. Ersetzen wir im Energiesatz

$$\mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}' = \mathbf{S} + \text{rot } \mathbf{R} \quad (\text{XI.20})$$

mit einem beliebigen (nichtsingulären) Vektorfeld  $\mathbf{R}$ , so bleibt das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial V} \mathbf{S}' \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{XI.21})$$

unverändert. In der differentiellen Form ist entsprechend  $\text{div } \mathbf{S} = \text{div } \mathbf{S}'$ . Es kann daher durchaus  $\mathbf{S} \neq 0$  sein, und dennoch der gesamte Energiefluß aus dem Volumen  $V$  verschwinden. Ein einfaches Beispiel für einen solchen Fall sind räumlich und zeitlich konstante (also statische) Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Ein von Null verschiedenes  $\mathbf{S}$  zeigt also nicht notwendig einen tatsächlichen Energiefluß aus dem Volumen an. Das dafür relevante Maß ist das Integral  $\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}$ .

## XI.2 Feldenergie der Elektro- und Magnetostatik

Betrachten wir stationäre, also zeitunabhängige Felder, so entkoppeln die elektrischen und magnetischen Felder. Daher können wir in diesem Fall auch die elektrischen und magnetischen Beiträge zur Feldenergie getrennt betrachten.

Die elektrische Feldenergie im gesamten Raum ist

$$\begin{aligned}
 U^E &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \int \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{D} d^3x \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \varphi \text{div } \mathbf{D} d^3x \\
 &= \frac{1}{2} \int \rho_f \varphi d^3x.
 \end{aligned}
 \tag{XI.22}$$

Der Schritt von der ersten zur zweiten Zeile ist natürlich nur in der Elektrostatik möglich. Bei der partiellen Integration im zweiten Schritt nehmen wir an, daß alle Felder und Ladungen im Unendlichen verschwinden.

Wir können den Ausdruck in der ersten Zeile als die im Feld enthaltene Energie deuten. Am Ausdruck in der letzten Zeile sehen wir aber, daß diese Energie nur dort einen von Null verschiedenen Beitrag hat, wo  $\rho \neq 0$ . Die Feldenergie ist also in der Elektrostatik in gewissem Sinne 'an die Ladungen gebunden'. Dies ist bei zeitabhängigen Feldern aber nicht mehr richtig.

In ähnlicher Weise können wir die magnetische Feldenergie betrachten:

$$\begin{aligned}
 U^M &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d^3x \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} d^3x \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} d^3x \\
 &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{A} d^3x,
 \end{aligned}
 \tag{XI.23}$$

wobei wir die partielle Integration im zweiten Schritt mittels der Relation  $\text{div } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}$  durchgeführt und wieder das Verschwinden der Felder und Ströme im Unendlichen angenommen haben.

Auch hier ist im Falle der Statik die Feldenergie in gewissem Sinne 'an die Ströme gebunden', wie uns die letzte Zeile anzeigt. Auch dies ist bei zeitabhängigen Feldern nicht der Fall.

## XI.3 Impulssatz der Elektrodynamik

Wir wollen nun ein ähnliches Verfahren wie beim Energiesatz für den Impuls anwenden. Dazu betrachten wir die Lorentzkraftdichte

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}.
 \tag{XI.24}$$

Wir wollen die Felder in Materie untersuchen und betrachten daher  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  als freie Ladungen  $\rho_f$  bzw. Ströme  $\mathbf{j}_f$ . Mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\rho_f = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad \mathbf{j}_f = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{XI.25})$$

erhalten wir

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right]. \quad (\text{XI.26})$$

Den letzten Term hierin können wir umschreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (\text{XI.27})$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{f} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})], \quad (\text{XI.28})$$

worin wir die die Maxwell-Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  genutzt haben, um auf der rechten Seite einen in den elektrischen und magnetischen Termen symmetrischen Ausdruck zu erhalten.

Als nächsten Schritt wollen wir die rechte Seite, analog der Herleitung des Energiesatzes, als Divergenz schreiben. Betrachten wir dazu erst die elektrischen Terme und erinnern uns an die Schreibweise  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \sum_j \nabla_j D_j = \nabla_j D_j$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i &= E_i \nabla_j D_j - \epsilon_{ijk} D_j (\nabla \times \mathbf{E})_k \\ &= E_i \nabla_j D_j - \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} D_j \nabla_l E_m \\ &= E_i \nabla_j D_j - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) D_j \nabla_l E_m \\ &= E_i \nabla_j D_j - D_m \nabla_i E_m + D_j \nabla_j E_i \\ &= \nabla_j (E_i D_j) - D_m \nabla_i E_m. \end{aligned} \quad (\text{XI.29})$$

Falls wir ein Medium mit  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  haben, so ist dabei

$$D_m \nabla_i E_m = \epsilon E_m \nabla_i E_m = \frac{\epsilon}{2} \nabla_i E_m^2 = \frac{1}{2} \nabla_i (E_m D_m) \quad (\text{XI.30})$$

und damit

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i &= \nabla_j E_i D_j - \frac{1}{2} \nabla_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \\ &= \nabla_j \left( E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right). \end{aligned} \quad (\text{XI.31})$$

Ganz analog kann man die magnetischen Terme behandeln und findet

$$[\mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})]_i = \nabla_j \left( H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right). \quad (\text{XI.32})$$

Durch Einsetzen in (XI.28) erhalten wir also

$$\mathbf{f} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{4\pi} \left[ E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right]. \quad (\text{XI.33})$$

Man definiert daher den **Maxwellschen Spannungstensor**

$$T_{ij} := \frac{1}{4\pi} \left[ E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right]. \quad (\text{XI.34})$$

Da ein linearer Zusammenhang  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  angenommen wurde, ist der Spannungstensor symmetrisch,

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad (\text{XI.35})$$

d. h. der Maxwellsche Spannungstensor ist ein symmetrischer Tensor 2. Stufe.

Naheliegenderweise<sup>1</sup> definieren wir weiter die **Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes** als

$$\mathbf{g} := \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (\text{XI.36})$$

Offenbar ist diese proportional zum Poynting-Vektor,

$$\mathbf{g} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \mathbf{S}. \quad (\text{XI.37})$$

Mit diesen Definitionen ergibt sich der **Impulssatz** des elektromagnetischen Feldes als

$$\boxed{\left[ \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} \right]_i = \nabla_j T_{ij}} \quad (\text{XI.38})$$

Den Impulssatz im Vakuum erhält man wieder durch die Ersetzung  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B}$  in den hier auftretenden Größen.<sup>2</sup>

Zur Deutung des Impulssatzes betrachten wir ein Volumen  $V$  und beachten, daß

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{(V)}, \quad (\text{XI.39})$$

worin  $\mathbf{P}^{(V)}$  der mechanische Impuls im Volumen  $V$  sei. Die auf das Volumen  $V$  ausgeübte Lorentzkraft ist dann in Komponenten

$$F_i = \int_V f_i d^3x = \frac{d}{dt} P_i^{(V)}, \quad (\text{XI.40})$$

woraus sich die integrale Form des Impulssatzes ergibt:

$$\frac{d}{dt} \left( P_i^{(V)} + \int_V g_i d^3x \right) = \int_V \nabla_j T_{ij} d^3x. \quad (\text{XI.41})$$

Mit dem Gaußschen Satz können wir die rechte Seite in ein Oberflächenintegral umwandeln,

$$\frac{d}{dt} \left( P_i^{(V)} + \int_V g_i d^3x \right) = \int_{\partial V} T_{ij} df_j. \quad (\text{XI.42})$$

<sup>1</sup>Tatsächlich ist die optimale Definition der Impulsdichte des Feldes in Materie eine komplizierte Angelegenheit. Dies geht darauf zurück, daß in Medien die Unterscheidung zwischen 'elektromagnetisch' und 'mechanisch' nicht ohne weiteres eindeutig ist. Es finden sich in der Literatur daher andere, ebenfalls korrekte Formen der Impulsdichte. Für eine detailliertere Diskussion siehe z. B. Jackson oder Landau & Lifschitz, 'Elektrodynamik der Kontinua'.

<sup>2</sup>Die in der vorherigen Fußnote angesprochenen Probleme mit der Definition des Feldimpulses tritt im Vakuum natürlich nicht auf.



Das Volumen  $V$  trägt also außer dem mechanischen Impuls noch einen elektromagnetischen Feldimpuls  $\mathbf{G}^{(V)}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^{(V)} &= \int_V \mathbf{g} d^3x \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int_V \mathbf{D} \times \mathbf{B} d^3x \\ &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \int_V \mathbf{S} d^3x.\end{aligned}\quad (\text{XI.43})$$

Der Gesamtimpuls  $\mathbf{P}^{(V)} + \mathbf{G}^{(V)}$  kann geändert werden, indem das Feld mittels des Spannungstensors eine Kraft

$$\int_{\partial V} T_{ij} df_j \quad (\text{XI.44})$$

auf die Oberfläche  $\partial V$  ausübt.

Gemäß dieser Überlegungen wird von einer elektromagnetischen Energieströmung ein Impuls transportiert, dessen Betrag um  $v_{\text{Ph}}^2 = \frac{c^2}{\epsilon\mu}$  kleiner ist als die pro Zeiteinheit transportierte Energie. Elektromagnetische Wellen tragen also einen Impuls, den man als **Strahlungsdruck** oder **Lichtdruck** bezeichnet. (Siehe auch Übungen.)

Zur Veranschaulichung des Maxwell'schen Spannungstensors ist folgende Überlegung nützlich. Wir betrachten zur Vereinfachung nur den elektrischen Beitrag  $T^E$  und nutzen ein Koordinatensystem, in dem für den betrachteten Ort die  $z$ -Achse parallel zum Feld ist,  $\mathbf{e}_z \parallel \mathbf{E}$ . Dann ist an diesem Ort nur  $E_z = |\mathbf{E}| \neq 0$  und wir erhalten den diagonalen Tensor

$$T^E = \epsilon \frac{E_z^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.45})$$

Auf eine Fläche  $\Delta \mathbf{f} = (\Delta f) \mathbf{n}$ , die wir hinreichend klein annehmen, so daß darüber  $\mathbf{E}$  konstant ist, wirkt die Kraft

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = T^E \Delta \mathbf{f} = \epsilon \frac{E_z^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \epsilon \frac{E_z^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_z \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.46})$$

Wir betrachten nur zwei Fälle, für die wir diese Gleichung auswerten:

- Ist das Flächenstück  $\Delta f$  senkrecht zu den Feldlinien, d. h.  $\Delta \mathbf{f} \parallel \mathbf{E}$ , so  $n_x = n_y = 0$ , und die Kraft wirkt in Richtung der Normalen  $\mathbf{n}$ .
- Ist das Flächenstück  $\Delta f$  parallel zu den Feldlinien, d. h.  $\Delta \mathbf{f} \perp \mathbf{E}$ , so  $n_z = 0$ , und die Kraft wirkt entgegengesetzt zur Normalen  $\mathbf{n}$ .

Ein kleiner Würfel an diesem Ort mit der äußeren Normalen  $\mathbf{n}$  an seinen Seiten wird also in Richtung der Feldlinien auseinandergezogen, senkrecht dazu jedoch zusammengedrückt. Es wirkt also Zug in Richtung der Feldlinien, Druck senkrecht zu den Feldlinien. Dies ist analog einem Würfel, der aus einer Gummimembran besteht und sich im Schwerfeld befindet.

## Abbildung

Diese Beobachtung war historisch der Anlaß für das Äthermodell für elektromagnetische Wellen: die Analogie zur Mechanik legte nahe, daß auch für elektromagnetische Wellen ein mechanisches Übertragungsmedium existiert. Diese Vorstellung wurde später von Einstein als unzutreffend erkannt.

## XI.4 Kovariante Form des Energie- und Impulssatzes

Wir hatten in Kapitel VII die Elektrodynamik in kovarianter Form dargestellt. Der Energie- und der Impulssatz lassen sich mit Hilfe der kovarianten Formulierung zu einem Erhaltungssatz zusammenfassen. Wir betrachten dies im folgenden für Felder 'im Vakuum', oder genauer gesagt: nicht in Materie.

Wir gehen aus von der bereits in Kapitel VIII.2 betrachteten Größe  $f^\mu$ , in der Leistungs- und Kraftdichte zusammengefaßt sind, siehe (VIII.17) und (VIII.20). Dafür erhalten mit den Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form

$$\begin{aligned} f^\mu &= \frac{1}{c} j_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\rho F^\rho{}_\nu \\ &= \frac{1}{4\pi} [\partial_\rho (F^{\mu\nu} F^\rho{}_\nu) - F^\rho{}_\nu \partial_\rho F^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (\text{XI.47})$$

Darin können wir den letzten Term folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} F^\rho{}_\nu \partial_\rho F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (F^\rho{}_\nu \partial_\rho F^{\mu\nu} + F^\nu{}_\rho \partial_\nu F^{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2} (F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} + F_{\rho\nu} \partial^\nu F^{\rho\mu}) \\ &= \frac{1}{2} F_{\rho\nu} (\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu}) \\ &= -\frac{1}{2} F_{\rho\nu} \partial^\mu F^{\nu\rho} \\ &= \frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\rho\nu} F^{\rho\nu}) \\ &= \frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{4} g^{\mu\rho} \partial_\rho (F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu}). \end{aligned} \quad (\text{XI.48})$$

In der ersten Zeile haben wir dabei nur Indizes umbenannt. In der zweiten Zeile wurden Indizes gehoben bzw. gesenkt sowie die Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu}$  ausgenutzt. In der vierten Zeile wurden die homogenen Maxwell-Gleichungen in Form der Gleichung (VII.35) benutzt, nämlich

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0. \quad (\text{XI.49})$$

Die fünfte Zeile nutzt die allgemeine Formel  $df^2/dx = 2f(df/dx)$  für die Ableitung einer quadratischen Funktion sowie die Antisymmetrie von  $F^{\nu\rho}$ . In der vorletzten Zeile wurden noch einmal Summationsindizes umbenannt.

Setzen wir (XI.48) in (XI.47) ein, so erhalten wir den **Energie-Impuls-Satz** in kovarianter Form

$$\boxed{f^\mu = \partial_\rho T^{\mu\rho}} \quad (\text{XI.50})$$

mit dem **Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes**

$$T^{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\nu} F^\rho{}_\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu} \right). \quad (\text{XI.51})$$

Hierin ist im letzten Summand gerade  $F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ . Man erkennt leicht, daß  $T^{\mu\rho}$  symmetrisch ist,

$$T^{\mu\rho} = T^{\rho\mu}. \quad (\text{XI.52})$$

Ausgedrückt durch die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  ergibt sich

$$(T^{\mu\rho}) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) & B_2 E_3 - B_3 E_2 & B_3 E_1 - B_1 E_3 & B_1 E_2 - B_2 E_1 \\ B_2 E_3 - B_3 E_2 & E_1^2 + B_1^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) & E_1 E_2 + B_1 B_2 & E_1 E_3 + B_1 B_3 \\ B_3 E_1 - B_1 E_3 & E_1 E_2 + B_1 B_2 & E_2^2 + B_2^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) & E_2 E_3 + B_2 B_3 \\ B_1 E_2 - B_2 E_1 & E_1 E_3 + B_1 B_3 & E_2 E_3 + B_2 B_3 & E_3^2 + B_3^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{XI.53})$$

worin wir erkennen, daß sich für zeitliche bzw. räumliche Indizes bekannte Größen in folgender Anordnung ergeben:

$$(T^{\mu\rho}) = \left( \begin{array}{c|c} -u & -\frac{1}{c} S_l \\ \hline -\frac{1}{c} S_k & T_{kl} \end{array} \right). \quad (\text{XI.54})$$

Wir finden hierin die Energiedichte  $u$ , den Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$ , sowie den Maxwell'schen Spannungstensor  $T_{kl}$  wieder:

$$\begin{aligned} T^{00} &= -u = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \\ T^{0i} &= -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = -\frac{1}{c} S_i, \\ T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[ E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{XI.55})$$

In kovarianter Notation hat also der Poynting-Vektor offenbar die Darstellung

$$S_k = \frac{1}{4\pi} F^{0\nu} F_\nu{}^k. \quad (\text{XI.56})$$

Mit (XI.55) erhalten wir also aus dem Erhaltungssatz  $f^\mu = \partial_\rho T^{\mu\rho}$

- für  $\mu = 0$  den Energiesatz

$$-c f^0 = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S}, \quad (\text{XI.57})$$

- für  $\mu = k = 1, 2, 3$  den Impulssatz

$$f^k = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} S_k + \frac{\partial}{\partial x^l} T^{kl}. \quad (\text{XI.58})$$

# Kapitel XII

## Maßsysteme der Elektrodynamik

In der Physik ist die Wahl der Maßeinheiten physikalischer Größen und die technische Realisierung dieser Einheiten sowohl von fundamentaler als auch von praktischer und wirtschaftlicher Bedeutung. Die Wahl der Grundeinheiten und ihre Realisierung war historisch einem beständigen Wandel unterworfen, der bis heute anhält. Insbesondere wurden Grundeinheiten aufgrund neuer Erkenntnisse und technologischer Fortschritte immer wieder anders definiert.

Das Problem der verschiedenen Einheitensysteme betrifft keineswegs nur die Elektrodynamik. So ist es z. B. in der Elementarteilchenphysik zweckmäßig, **natürliche Einheiten** zu benutzen, die sich dadurch ergeben, daß man für das Plancksche Wirkungsquantum und die Lichtgeschwindigkeit

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1 \quad \text{und} \quad c = 1 \quad (\text{XII.1})$$

setzt. Dann werden alle Größen durch eine Längenskala ausdrückbar, oder äquivalent durch eine Energieskala. Der Vorteil dieser Wahl ist hier so groß, daß sie sich sowohl in der theoretischen wie in der experimentellen Elementarteilchenphysik durchgesetzt hat.

In der Elektrodynamik ist der Unterschied zwischen den für die theoretische Beschreibung günstigen Systemen und dem sonst üblichen (SI) System besonders augenfällig. Wir haben in dieser Vorlesung das Gaußsche System gewählt. Im folgenden wollen wir seine Verbindung mit anderen Systemen sowie das grundsätzliche Problem der Einheitenwahl betrachten.

### XII.1 Grundeinheiten und abgeleitete Einheiten

Allgemein wählt man Grundgrößen und definiert ihre Einheiten, um dann abgeleitete Größen zu erhalten. Dabei gibt es grundsätzlich eine große Freiheit, die fundamentalen Größen und ihre Basiseinheiten zu wählen. Die Ziele hierbei können verschieden sein. So kann die theoretische Einfachheit oder die praktische Zweckmäßigkeit bzw. experimentelle Realisierbarkeit im Vordergrund stehen. (Zudem ist zu beachten, daß die tatsächliche Umsetzung diese Ziele nicht immer zur Gänze erreicht.) Hierbei spielen ganz verschiedene Aspekte eine Rolle. Besonders wünschenswert ist die Unabhängigkeit der Basiseinheiten von äußeren Einflüssen. Um diese zu erreichen, führt man Basiseinheiten optimalerweise auf Naturkonstanten zurück. Weiter ist zu beachten, daß es von der Wahl der Grundeinheiten abhängt, welche Einheiten Fehler haben.

Von alters her ist es üblich, *Länge*, *Masse* und *Zeit* als Grundgrößen zu wählen und entsprechende Basiseinheiten zu definieren. Um 1874 wurde in Großbritannien das **CGS-System**

etabliert mit den Basiseinheiten cm, g, sec (Zentimeter, Gramm, Sekunde). Es wurde 1889 durch das **MKS-System** abgelöst, das auf m, kg und sec (Meter, Kilogramm und Sekunde) basiert. Seither wurde das MKS-System durch die *Stromstärke* mit der Basiseinheit Ampère (A) ergänzt und zum **MKSA-System**. Dieses ging später im bis heute gültigen **SI-System** (Système International d'Unité) auf. In diesem werden drei weitere Grundgrößen definiert: *Temperatur* mit Basiseinheit Kelvin (K), *Stoffmenge* mit Basiseinheit Mol und *Lichtstärke* mit Basiseinheit Candela (Cd).<sup>1</sup>

Die Definition der Basiseinheiten wurde im Laufe der Zeit mehrfach geändert.<sup>2</sup> Die heutigen Definitionen der für uns hier interessanten Basiseinheiten sind:

1 m	Weg, den Licht in 1/299792458 Sekunden im Vakuum zurücklegt (damit exakt, d. h. ohne Fehler bekannt);
1 kg	Masse des Urkilogramms, eines Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung, der im Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird;
1 sec	9192631770 Perioden der Strahlung des Übergangs zwischen den Hyperfeinniveaus des Grundzustands von <sup>133</sup> Cs;
1 A	(konstanter) Strom, der durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Abstand von 1 m befindliche Leiter von kleinem Querschnitt fließt, so daß die Kraft zwischen den Leitern $2 \cdot 10^{-7}$ N ist.

Die erste Definition legt die Vakuumlichtgeschwindigkeit exakt fest. Die letzte dieser Definition bestimmt den Wert von  $\mu_0$  im derzeitigen SI-System.

Gemäß obiger Definition, die man als *absolute Ampère* bezeichnet, ist das Ampère eine abgeleitete Einheit, da sie auf den anderen Einheiten beruht. Früher verwendete man das sog. *internationale Ampère*, das über die Silbermenge definiert war, die sich aus einer Silbernitratlösung an der Anode abschlägt. Mit der früheren Definition war das Ampère eine Grundeinheit unabhängig von Meter, Kilogramm und Sekunde.

Die Definition des Kilogramms anhand eines einmaligen Prototyps ist in vieler Hinsicht problematisch. So hat sich gezeigt, daß im Laufe der Zeit durch chemische Veränderungen an der Oberfläche (trotz genauestens geregelter Vorschriften zum Putzen) eine Abweichung der Masse von denen in anderen Ländern verwendeten Kopien des Prototyps auftrat.

Ab Mai 2019 gilt eine Neudefinition der SI-Einheiten, bei der insbesondere das Kilogramm nicht mehr durch einen Prototyp definiert ist, sondern auf das dann exakt festgelegte Plancksche Wirkungsquantum zurückgeführt wird. Das Ampère wird auf die dann exakt festgelegte Elementarladung  $e$  zurückgeführt. (Als Konsequenz werden die Werte von  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  nicht mehr exakt bekannt sein, sondern experimentelle Fehler haben.) Die Definition von Meter und Sekunde bleibt unverändert.

<sup>1</sup>Tatsächlich ist Candela eine Einheit, die aus den anderen SI-Einheiten hergeleitet werden könnte. Daß die Leuchtstärke dennoch im SI als Grundgröße beibehalten wird, liegt in der Bedeutung dieser Definition für die Wirtschaft begründet.

<sup>2</sup>Sehr frühe Definitionen waren z. B.

1 Meter = 10-millionster Teil des Erdmeridianquadranten,

1 Gramm = Masse von 1 cm<sup>3</sup> Wasser bei 4°C Temperatur und einem Druck von 760 mm Quecksilbersäule,

1 Sekunde = 86400-ter Teil des mittleren Sonnentages.

## XII.2 Elektromagnetische Einheiten und elektromagnetische Grundgleichungen

In der Elektrodynamik werden verschiedene Einheitensysteme verwendet. Für die theoretische Beschreibung sind vor allem das Gaußsche System und das Heavyside-Lorentz-System besonders günstig, während in der Experimentalphysik das SI-System vorgezogen wird.

Carl Friedrich Gauß entwarf das nach ihm benannte Einheitensystem basierend auf der Beobachtung, daß alle elektromagnetischen Einheiten aus dem den elektromagnetischen Grundgleichungen (Coulomb-Gesetz etc.) abgeleitet und durch Zentimeter, Gramm und Sekunde ausgedrückt werden können. Im allgemeinen sind dazu nicht-ganzzahlige Potenzen dieser Einheiten erforderlich. Der Vorteil des resultierenden Maßsystems ist seine Einfachheit. So haben elektrisches und magnetisches Feld dieselben Einheiten, was sehr natürlich ist, wenn sie im Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$  zusammengefaßt werden. Im Gegensatz dazu wird im SI-System das Ampère als unabhängige Einheit betrachtet, und elektrisches und magnetisches Feld haben unterschiedliche Einheiten.

Um die verschiedenen Systeme zu verstehen, betrachten wir im folgenden, welche dimensional Konstanten in den elektromagnetischen Grundgleichungen auftreten können.

Immer wählt man die Einheiten von Ladung und Strom so, daß der Strom eine Ladungsänderung in der Zeit ist,

$$[\text{Strom}] = \frac{[\text{Ladung}]}{[\text{Zeit}]}, \quad (\text{XII.2})$$

und damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist,

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{XII.3})$$

Betrachten wir weiter das Coulomb-Gesetz. Hier können wir eine Konstante  $k_1$  frei wählen,

$$|\mathbf{F}| = k_1 \frac{qq'}{r^2}. \quad (\text{XII.4})$$

Entweder ist darin  $k_1$  bestimmt, falls die Einheit der Ladung (und klarerweise bereits der Kraft und der Länge) definiert sind. Oder man wählt  $k_1$  willkürlich, um die Einheit der Ladung zu definieren. (Dies war Ausgangspunkt für Gauß' Überlegungen, bei denen durch  $k_1 = 1$  eine besonders einfache Form des Coulomb-Gesetzes resultiert.) Aus der Kraft im Coulomb-Gesetz ist die Einheit des elektrischen Feldes festgelegt,

$$|\mathbf{E}| = k_1 \frac{q}{r^2}. \quad (\text{XII.5})$$

Bei den magnetischen Grundgleichungen haben wir für die Kraft pro Länge  $l$  zwischen zwei Strömen geradliniger, paralleler, unendlich langer Leiter im Abstand  $d$  eine weitere freie Konstante,

$$\frac{d|\mathbf{F}|}{dl} = 2 k_2 \frac{II'}{d}. \quad (\text{XII.6})$$

Da Strom als Ladung pro Zeit definiert ist, ist die Dimension  $[k_1]$  relativ zu  $[k_2]$  festgelegt aus dieser Gleichung und dem Coulomb-Gesetz,

$$\left[ \frac{k_1}{k_2} \right] = [\text{Geschwindigkeit}]^2. \quad (\text{XII.7})$$

Der Vergleich beider Kräfte für bekannte Ladungen und Ströme ergibt numerisch dafür das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit,

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2. \quad (\text{XII.8})$$

Die magnetische Induktion im radialen Abstand  $d$  von einem langen, geraden Leiter mit Strom  $I$  ist nach dem Ampèreschen Gesetz

$$|\mathbf{B}| = 2 k_2 \alpha \frac{I}{d}, \quad (\text{XII.9})$$

worin wir eine weitere freie Konstante  $\alpha$  haben. Außerdem haben wir im Induktionsgesetz eine mögliche Konstante  $k_3$ , die Einheiten des elektrischen Feldes und der magnetischen Induktion relativ zu einander festlegt,

$$\text{rot } \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (\text{XII.10})$$

Man findet nun, daß  $[k_3] = [\alpha^{-1}]$ . Es gilt sogar  $k_3 = 1/\alpha$ . Dies ist am einfachsten herzuleiten aus den Maxwell-Gleichungen zu den Grundgleichungen mit obigen Konstanten,

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \quad (\text{XII.11})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi k_2 \mathbf{j} + \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{XII.12})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{XII.13})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{XII.14})$$

Aus diesen erhalten wir in bekannter Weise die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{B} - k_3 \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{XII.15})$$

Damit dies mit der Wellengleichung mit der Lichtgeschwindigkeit als Phasengeschwindigkeit übereinstimmt, muß gelten

$$\frac{k_1}{k_3 k_2 \alpha} = c^2, \quad (\text{XII.16})$$

und wegen (XII.8) also

$$k_3 = \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{XII.17})$$

### XII.3 Elektromagnetische Maßsysteme

Die verschiedenen elektromagnetischen Maßsysteme sind nun durch die verschiedene Wahl der Konstanten  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  (und  $\alpha$ ) definiert. Von praktischer Bedeutung sind neben dem SI-System vor allem das von uns verwendete **Gaußsche System** sowie Varianten davon, unter denen besonders das **Heavyside-Lorentz-System** hervorzuheben ist. Die üblichen Definitionen sind in folgender Tabelle gegeben.

	$k_1$	$k_2$	$\alpha$	$k_3$
Gaußsches CGS	1	$\frac{1}{c^2}$	$c$	$\frac{1}{c}$
Heavyside-Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$c$	$\frac{1}{c}$
SI	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	1	1

Damit ist im Gaußschen System das Coulomb-Gesetz sehr einfach (insbesondere ohne Konstanten),

$$\text{Gauß:} \quad |\mathbf{F}| = \frac{qq'}{r^2}. \quad (\text{XII.18})$$

Im Heavyside-Lorentz-System dagegen haben wir für das Coulomb-Gesetz

$$\text{Heavyside-Lorentz:} \quad |\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi} \frac{qq'}{r^2}. \quad (\text{XII.19})$$

Das Heavyside-Lorentz-System hat gegenüber dem Gaußschen System den Vorteil, daß Faktoren  $4\pi$  immer genau an den Stellen auftreten, wo sie aufgrund sphärischer Symmetrie bzw. der korrespondierenden Integration über den gesamten Raumwinkel auch zu erwarten sind. Leider hat sich das Heavyside-Lorentz-System aber in der Literatur nicht durchgesetzt.

Im SI-System ist der Zahlenwert von  $\mu_0$  per Definition festgelegt.  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  hängen mit der Lichtgeschwindigkeit durch

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (\text{XII.20})$$

zusammen. Da der Zahlenwert von  $\mu_0$  als Definition gewählt ist und der Wert von  $c$  durch die Meterdefinition festgelegt ist, kann hieraus  $\epsilon_0$  berechnet werden. Damit ist klar, daß  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  rein konventionelle Konstanten ohne jegliche tiefere physikalische Bedeutung sind.

Die Umrechnung aller elektromagnetischen Einheiten zwischen den verschiedenen Maßsystemen ergibt sich leicht aus obigen Gleichungen. Eine Zusammenstellung findet sich z. B. im Buch von J. D. Jackson. Zum Beispiel ist für die Ladung

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As} \quad \simeq \quad 3 \cdot 10^{19} \text{ esE (oder esU oder statCb)},$$

wobei der Faktor 3 abkürzend und näherungsweise für 2,99792458 steht, d. h. für den numerischen Wert aus der Lichtgeschwindigkeit.



# Kapitel XIII

## Felder bewegter Ladungen

### XIII.1 Liénard-Wiechert-Potentiale

Wir wollen die Felder einer beliebig bewegten Punktladung beschreiben. Dazu benutzen wir die retardierten Potentiale, die wir in Kapitel V hergeleitet haben. Wir verwenden hier aber die in Kapitel VII eingeführte kovariante Formulierung.

Wir nehmen in erster Näherung an, daß die Energieabstrahlung keinen merklichen Effekt auf die Teilchenbewegung habe. Tatsächlich verliert das Teilchen im allgemeinen durch Abstrahlung Energie, was unter dem Begriff **Strahlungsdämpfung** zusammengefaßt wird.<sup>1</sup>

Die Bahn des Teilchens sei durch  $\boldsymbol{\xi}(t)$  beschrieben. Die Ladungs- und Stromdichte ist dann

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \quad (\text{XIII.1})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q \mathbf{v}(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)), \quad (\text{XIII.2})$$

worin  $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\xi}(t)$ . Die 4-Stromdichte ist dann

$$j^\mu(x) = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - \xi(\tau)), \quad (\text{XIII.3})$$

mit der Weltlinie  $\xi(\tau) = (\xi^\mu(\tau))$  des Teilchens, die von der Eigenzeit  $\tau$  abhängt.

Um dies zu erkennen, betrachten wir nun  $j^\mu$  in einem System mit der Zeitkoordinate  $s$  mit  $d\tau = \frac{ds}{\gamma}$ . Dort finden wir  $\xi = \begin{pmatrix} cs \\ \boldsymbol{\xi}(s) \end{pmatrix}$  und  $u = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}(s) \end{pmatrix} = c\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta}(s) \end{pmatrix}$ . Daher ist die 0-Komponente von (XIII.3)

$$\begin{aligned} j^0 &= qc \int \frac{ds}{\gamma} (c\gamma) \delta(ct - cs) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(s)) \\ &= qc \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \\ &= c\rho(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (\text{XIII.4})$$

wobei in der zweiten Zeile  $\delta(c(t - s)) = \frac{1}{c} \delta(t - s)$  verwendet wurde. Für die räumlichen Komponenten von (XIII.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t) &= qc \int \frac{ds}{\gamma} (\gamma \mathbf{v}(s)) \delta(ct - cs) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(s)) \\ &= q\mathbf{v}(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)). \end{aligned} \quad (\text{XIII.5})$$

---

<sup>1</sup>Diese Bezeichnung stammt daher, daß bei einem Teilchen in harmonischer Oszillatorbewegung der Energieverlust die Form eines Reibungsterm hat, also einer gedämpften Schwingung entspricht.

Das  $j^\mu$  in (XIII.3) beschreibt also wie gewünscht die Bahn des Teilchens. Da die Integration über  $d\tau$  mit der Delta-Funktion invariant unter Lorentz-Transformationen ist und  $u^\mu$  einen Vierervektor darstellt, ist  $j^\mu$  ebenfalls ein Vierervektor.

Die Viererstromdichte  $j^\mu$  ist Quelle in der Wellengleichung für das Vektorpotential  $A^\mu$ ,

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (\text{XIII.6})$$

Deren allgemeine Lösung in der Lorenz-Eichung ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) ist

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_{\text{ret}}(x-x') j^\mu(x') \quad (\text{XIII.7})$$

erhalten wir mittels der retardierten Greenfunktion, die die Gleichung

$$\square D(x) = \delta^{(4)}(x) \quad (\text{XIII.8})$$

löst. Die retardierte Greenfunktion kennen wir bereits aus Kapitel V.4. Gleichung (XIII.8) unterscheidet sich allerdings von (V.118) um einen Faktor  $1/c$ , denn  $\delta^{(4)} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(x^0) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(ct) = \frac{1}{c} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t)$ . Gemäß (V.127) oder (V.128) ist daher die durch (XIII.8) bestimmte retardierte Greenfunktion

$$\begin{aligned} D_{\text{ret}}(x) &= \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 - |\mathbf{x}|) \theta(x^0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(x^0). \end{aligned} \quad (\text{XIII.9})$$

Mit dem obigen  $j^\mu$  erhalten wir also

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= 2q \int d\tau \int d^4x' \theta(x^0 - x'^0) \delta((x-x')^2) u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x' - \xi(\tau)) \\ &= 2q \int d\tau \theta(x^0 - x'^0) \delta((x - \xi(\tau))^2) u^\mu(\tau). \end{aligned} \quad (\text{XIII.10})$$

Die Theta-Funktion in diesem Integral sagt uns, daß nur in der Vergangenheit des Zeitpunktes  $t$  liegende Weltpunkte zum Integral beitragen. Die Delta-Funktion sagt uns, daß die beitragenden Weltpunkte außerdem auf dem Lichtkegel des Punktes  $x$  liegen müssen. Zusammen sagen uns diese beiden Bedingungen also, daß nur Weltpunkte zum Integral beitragen, an denen die Weltlinie des Teilchens den Rückwärtslichtkegel des Weltpunktes  $x$  schneidet. Da das Teilchen sich langsamer als Licht bewegt, gibt es nur einen solchen Schnittpunkt seiner Weltlinie mit dem Rückwärtslichtkegel des Weltpunktes  $x$ . Dies kann man leicht in einem Minkowski-Diagramm erkennen, da hier die Weltlinie des Teilchens immer eine größere Steigung als der Lichtkegel hat.

Abbildung

Ein Beitrag zum Integral ergibt sich also nur für

$$\tau = \tau_{\text{ret}} \quad \text{mit} \quad x^0 - \xi^0(\tau_{\text{ret}}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\tau_{\text{ret}})|. \quad (\text{XIII.11})$$

Die Delta-Funktion in (XIII.10) werten wir mit Hilfe von (I.15) aus, wobei wir benutzen, daß

$$\frac{d}{d\tau} (x - \xi(\tau))^2 = -2(x - \xi(\tau))_{\mu} u^{\mu}(\tau). \quad (\text{XIII.12})$$

Damit erhalten wir die **Liénard-Wiechert-Potentiale**

$$A^{\mu}(x) = q \frac{u^{\mu}(\tau)}{u(\tau) \cdot (x - \xi(\tau))} \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}} \quad (\text{XIII.13})$$

Die nicht-kovariante Form hiervon erhalten wir in einem gegebenen Bezugssystem mit

$$\begin{aligned} u \cdot (x - \xi) &= u^0(x^0 - \xi^0) - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \\ &= \gamma c^2(t_x - t_{\xi}) - \gamma \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \\ &= \gamma c |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (\text{XIII.14})$$

worin in der letzten Gleichung die Bedingung (XIII.11) verwendet wurde und wir definieren

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\tau_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\tau_{\text{ret}})|}. \quad (\text{XIII.15})$$

Dann sind die **Liénard-Wiechert-Potentiale**

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}} \quad (\text{XIII.16})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{q \boldsymbol{\beta}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}} \quad (\text{XIII.17})$$

Die elektromagnetischen Felder erhält man aus den Liénard-Wiechert-Potentialen durch Berechnen von  $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$ . Etwas einfacher ist es, von der Integraldarstellung (XIII.10) auszugehen. Man findet nach einigen Schritten

$$F^{\mu\nu} = \frac{q}{u \cdot (x - \xi)} \frac{d}{d\tau} \frac{(x - \xi)^{\mu} u^{\nu} - (x - \xi)^{\nu} u^{\mu}}{u \cdot (x - \xi)} \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}}. \quad (\text{XIII.18})$$

Man kann dies weiter auswerten, wobei die Viererbeschleunigung  $a^{\mu}$  auftritt:

$$F^{\mu\nu} = \frac{q}{[u \cdot (x - \xi)]^2} \left\{ [(x - \xi)^{\mu} a^{\nu} - (x - \xi)^{\nu} a^{\mu}] - \frac{(x - \xi)^{\mu} u^{\nu} - (x - \xi)^{\nu} u^{\mu}}{u \cdot (x - \xi)} \frac{d}{d\tau} [u \cdot (x - \xi)] \right\} \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}}. \quad (\text{XIII.19})$$

Da aber

$$\frac{d}{d\tau} [u \cdot (x - \xi)] = -u^2 + (x - \xi) \cdot a = -c^2 + (x - \xi) \cdot a, \quad (\text{XIII.20})$$

erkennen wir, daß in diesem Ausdruck für  $F^{\mu\nu}$  Terme auftreten, die nur  $u$  enthalten, und solche, die  $u$  und  $a$  enthalten. Wir spalten daher den Feldstärketensor entsprechend dem Auftreten der Beschleunigungsterme auf:

$$F^{\mu\nu} = F_{(u)}^{\mu\nu} + F_{(a)}^{\mu\nu}, \quad (\text{XIII.21})$$

und erhalten für diese beiden Beiträge

$$F_{(u)}^{\mu\nu} = \frac{q c^2}{[u \cdot (x - \xi)]^3} [(x - \xi)^\mu u^\nu - (x - \xi)^\nu u^\mu] \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}} \quad (\text{XIII.22})$$

$$F_{(a)}^{\mu\nu} = \frac{q}{[u \cdot (x - \xi)]^2} \left\{ [(x - \xi)^\mu a^\nu - (x - \xi)^\nu a^\mu] - \frac{a \cdot (x - \xi)}{u \cdot (x - \xi)} [(x - \xi)^\mu u^\nu - (x - \xi)^\nu u^\mu] \right\} \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}}. \quad (\text{XIII.23})$$

Hieraus kann man in einigen Schritten die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  extrahieren. Auch hier trennen wir die Beiträge, die nur die Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\beta}$  enthalten, von denen, die auch die Beschleunigung  $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}$  enthalten:

$$\mathbf{E}_{(u)} = \frac{q(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}}, \quad (\text{XIII.24})$$

$$\mathbf{E}_{(a)} = \frac{q}{c |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \mathbf{n} \times \left[ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right] \Big|_{\tau=\tau_{\text{ret}}}. \quad (\text{XIII.25})$$

Analog gibt es zwei Beiträge zum  $\mathbf{B}$ -Feld,  $\mathbf{B}_{(u)}$  und  $\mathbf{B}_{(a)}$ , deren erster nur von der Geschwindigkeit abhängt, während der zweite auch von der Beschleunigung abhängt. Diese können aus den Ausdrücken für  $\mathbf{E}$  erhalten werden durch

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (\text{XIII.26})$$

Mit  $f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$  kann man den Ausdruck für die Kraft bestimmen, die das Teilchen auf der Bahn  $\xi(\tau)$  auf ein Teilchen am Raumzeitpunkt  $x$  ergibt. Im einfachen Spezialfall eines Teilchens in geradliniger gleichförmiger Bewegung treten die Beschleunigungsterme natürlich nicht auf.

Wir beobachten, daß die beiden Beiträge  $F_{(u)}^{\mu\nu}$  und  $F_{(a)}^{\mu\nu}$  bei großen Abständen  $R = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  mit verschiedenen Potenzen von  $R$  abfallen:

$$\begin{aligned} F_{(u)}^{\mu\nu} &\text{ fällt ab mit } \frac{1}{R^2} \\ F_{(a)}^{\mu\nu} &\text{ fällt ab mit } \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (\text{XIII.27})$$

Gemäß den Betrachtungen aus Kapitel XI führt nur der letztere zu einer Ausstrahlung von Energie bei großen Abständen. Der führende Beitrag zum Poynting-Vektor

$$S_k = \frac{1}{4\pi} F^{0\nu} F_\nu^k \quad (\text{XIII.28})$$

ist daher

$$F_{(a)}^{\mu\nu} F_{(a)\nu}{}^\rho = \frac{q^2}{[(x - \xi) \cdot u]^4} \{ [(x - \xi)^\mu a^\rho + (x - \xi)^\rho a^\mu] (x - \xi) \cdot a - (x - \xi)^\mu (x - \xi)^\rho a^2 \} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^3}\right). \quad (\text{XIII.29})$$

## XIII.2 Strahlung beschleunigter Ladungen, Larmor-Formel

Es können nur solche Beiträge zu den Feldstärken zur Ausstrahlung führen, für die der Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \quad (\text{XIII.30})$$

für große  $|\mathbf{x}|$  proportional zu  $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$  abfällt. Nur dann ist die gesamte ausgestrahlte Leistung positiv, denn diese ist gegeben durch

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^2 \int |\mathbf{S}| d\Omega = \frac{dW}{dt} = P. \quad (\text{XIII.31})$$

Wie wir oben gesehen haben, haben nur die Beschleunigungsfelder  $\mathbf{E}_{(a)}$  und  $\mathbf{B}_{(a)}$  diese Eigenschaft.

■ Im Vakuum strahlen nur beschleunigte Ladungen.

Man kann dies auch leicht mittels des Relativitätsprinzips erklären. Im Falle einer Ladung mit konstanter Geschwindigkeit, die sich also in gleichförmig geradliniger Bewegung befindet, besteht im Bezugssystem der Ladung nur ein statisches Feld und es wird klarerweise keine Strahlung abgegeben. Dies gilt demzufolge auch in einem System, das relativ hierzu gleichförmig bewegt ist.

In materiellen Medien ist die Situation anders, wie wir ohne Herleitung angeben. Hier kann auch eine gleichförmig mit Geschwindigkeit  $v$  bewegte Ladung strahlen, wenn sie sich schneller als mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}} = c/n$  des Medium in diesem bewegt. Bei höheren Geschwindigkeiten gibt die Ladung sogenannte **Čerenkov-Strahlung** ab. Diese breitet sich auf einem Kegel mit dem halben Öffnungswinkel  $\pi - \vartheta_0$  aus, und es gilt  $\cos \vartheta_c = \frac{c}{nv}$  mit  $\vartheta_c = \vartheta_0 - \pi/2$ .

Abbildung

Wir wollen nun explizit den Fall eines *langsam bewegten* Teilchens im Vakuum betrachten. Es gelte also  $\beta \ll 1$ . Dann erhalten wir aus (XIII.25)

$$\mathbf{E}_{(a)} \simeq \frac{q}{c} \frac{\mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \Bigg|_{\text{ret}}. \quad (\text{XIII.32})$$

Wegen  $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$  und  $\mathbf{n} \perp \mathbf{E}_{(a)}$  ergibt sich für den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} |\mathbf{E}_{(a)}|^2 \quad (\text{XIII.33})$$

und damit für die ausgestrahlte Leistung pro Raumwinkelbereich

$$\frac{dP}{d\Omega} = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{S}| = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left| \mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right|^2. \quad (\text{XIII.34})$$

Mit der Bezeichnung  $\theta = \angle(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{v}}{dt})$  erhalten wir damit die **Larmor-Formel** für die pro Raumwinkel und für die gesamte ausgestrahlte Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (\text{XIII.35})$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \quad (\text{XIII.36})$$

Die ausgestrahlte Energie ist also proportional zum Quadrat der Beschleunigung. Die Winkelverteilung der Strahlung für eine langsam bewegte Ladung ist dieselbe wie bei der Hertzschen Dipolstrahlung, siehe unten.

Für eine *schnell bewegte* Ladung geben wir ohne Herleitung das Resultat für den einfachen Fall an, daß die Beschleunigung in Richtung der Geschwindigkeit der Ladung erfolgt, d. h. für  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{\beta}$ . Dann gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{q^2 \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (\text{XIII.37})$$

Die Abstrahlung erfolgt sehr stark in Vorwärtsrichtung, das Maximum der Strahlungsintensität liegt für  $\beta \rightarrow 1$  bei einem Winkel  $\theta|_{\max}$  mit

$$\theta|_{\max} \simeq \frac{1}{2\gamma} = \frac{mc^2}{2E}. \quad (\text{XIII.38})$$

### Abbildung

In ähnlicher Weise läßt sich aus den Liénard-Wiechert-Feldern die Strahlung von Ladungen für viele verschiedene Situationen berechnen, z. B. die Bremsstrahlung von Elektronen beim Eintritt in ein Metall oder die Synchrotronstrahlung von kreisförmig bewegten Ladungen. Aus der abgestrahlten Leistung kann in natürlicher Weise der Energieverlust einer beschleunigten Ladung und ihre Abbremsung, also allgemein die Strahlungsdämpfung, bestimmt werden. Geneigte Leser finden die entsprechenden Herleitungen in der Literatur.

## XIII.3 Strahlung oszillierender Ladungsverteilungen

Besondere praktische Bedeutung haben periodisch schwingende Ladungsverteilungen. Zum einen treten sie in vielen technischen Anwendungen auf, z. B. in Sendern bzw. Antennen für elektromagnetische Wellen. Zum anderen läßt sich jede (auch nicht-periodische) zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilung,  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ , durch eine Fourier-Zerlegung nach Frequenzen ausdrücken,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \rho_\omega(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (\text{XIII.39})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \mathbf{j}_\omega(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \quad (\text{XIII.40})$$

Aufgrund der Linearität der Maxwell-Gleichungen kann man die elektromagnetischen Felder für die allgemeinen Verteilungen  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  als Superposition erhalten, wenn man sie für die periodischen Verteilungen kennt, als deren Überlagerung sie mittels der Fourier-Zerlegung dargestellt werden.

Wir betrachten daher im folgenden zeitlich periodische Ladungs- und Stromverteilungen der Form

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (\text{XIII.41})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \quad (\text{XIII.42})$$

Dabei ist es für die folgenden Betrachtungen wieder günstig, diese Ladungs- und Stromverteilungen als komplexwertige Funktionen zu wählen, und damit auch die ortsabhängigen Faktoren  $\rho(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  darin. Die physikalischen (reellwertigen) Ladungs- und Stromverteilungen können als Realteil gewählt werden. Weiter nehmen wir an, daß die Ladungs- und Stromverteilungen außerhalb eines beschränkten räumlichen Bereichs  $G$ , z. B. der Größe  $d$ , verschwinden. Uns interessieren nun die elektromagnetischen Felder außerhalb dieses beschränkten Bereichs sowie die damit abgestrahlte Energie.

Damit die Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und die Stromverteilung  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  die Kontinuitätsgleichung (I.93) erfüllen, muß für die ortsabhängigen Faktoren gelten

$$i\omega\rho(\mathbf{x}) = \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{x}). \quad (\text{XIII.43})$$

In Lorenz-Eichung erhalten wir aus der Stromdichte mittels (V.136) das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{XIII.44})$$

mit

$$t'_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \quad k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}. \quad (\text{XIII.45})$$

Einsetzen der retardierten Zeit  $t'_{\text{ret}}$  in die Stromdichte (XIII.42) ergibt

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t'_{\text{ret}}} = \mathbf{j}(\mathbf{x}') e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega t}, \quad (\text{XIII.46})$$

so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' e^{-i\omega t} \\ &=: \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{XIII.47})$$

Das magnetische Feld erhalten wir daraus als

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (\text{XIII.48})$$

woraus sich ergibt, daß die Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{B}$  ebenfalls durch den Faktor  $\exp(-i\omega t)$  gegeben ist. Außerhalb des Bereichs  $G$  verschwinden Ladungs- und Stromdichte, so daß sich dort die Maxwell-Gleichung (I.88) vereinfacht zu  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$ . Mit der bekannten Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{B}$  findet man hierzu leicht als Lösung

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (\text{XIII.49})$$

Wir wollen annehmen, daß die Ausdehnung des Bereichs  $G$ , in dem die Ladungs- und Stromdichte lokalisiert sind, klein gegenüber der Wellenlänge ist, und die Felder bei großen Abständen  $r = |\mathbf{x}|$  betrachten, d. h.

$$d \ll \lambda = \frac{2\pi}{\omega} c, \quad r \gg d. \quad (\text{XIII.50})$$

Wir können dann in (XIII.47) den Faktor  $\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$  in eine Taylorreihe entwickeln,

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-1)^l (\mathbf{x}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'})^l \left. \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right|_{\mathbf{x}'=0} \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r} \left( ik - \frac{1}{r} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{XIII.51})$$

worin

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (\text{XIII.52})$$

Aus dieser Entwicklung resultieren in (XIII.47) verschiedene Terme, die wir im folgenden behandeln.

### XIII.3.a Elektrische Dipolstrahlung, Hertzscher Dipol

Der führende ( $l = 0$ ) Term in der obigen Taylor-Entwicklung ergibt die **elektrische Dipolstrahlung**, die auch als **E1-Strahlung** bezeichnet wird. Das Vektorpotential dieses ersten Terms ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (\text{XIII.53})$$

Darin können wir das Integral folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' &= \int [\mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \nabla] \mathbf{x}' d^3x' \\ &= - \int \mathbf{x}' \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= -i\omega \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (\text{XIII.54})$$

Der erste Schritt dabei ist eine Identität der Vektoranalysis. Es folgt eine partielle Integration, sodann die Benutzung der aus der Kontinuitätsgleichung folgenden Relation (XIII.43). Schließlich wurde die Definition (III.33) des elektrischen Dipolmoments  $\mathbf{p}$  verwendet. Mit  $k = \frac{\omega}{c}$  erhalten wir also dann das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -ik \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathbf{p}, \quad (\text{XIII.55})$$

was eine auslaufende Kugelwelle darstellt. Die Proportionalität zum elektrischen Dipolmoment des ortsabhängigen Faktors  $\rho(\mathbf{x})$  der Ladungsverteilung erklärt die Bezeichnung als elektrische Dipolstrahlung.  $\mathbf{A}$  ist also das Vektorpotential einer E1-Kugelwelle.



Als **Hertzscher Dipol** oder **Hertzscher Oszillator** wird eine oszillierende Ladungsverteilung bezeichnet, die einem Punktdipol (vgl. Kapitel III.2) entspricht, so daß die höheren Terme aus obiger Taylor-Entwicklung keinen Beitrag zum Integral (XIII.47) liefern. Ein solcher Punktdipol ist gegeben durch eine Ladungsverteilung mit zwei Ladungen  $+q$  und  $-q$  im Abstand  $\mathbf{d}$  im Grenzwert  $d \rightarrow 0$  mit  $q \rightarrow \infty$  bei festgehaltenem  $|\mathbf{p}|$ . Oszilliert diese Ladungsverteilung mit der Zeitabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$ , so haben wir ein zeitabhängiges Dipolmoment

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p} e^{-i\omega t}. \quad (\text{XIII.56})$$

Eine solche oszillierende Ladungsverteilung gibt nur elektrische Dipolstrahlung ab. Man bezeichnet auch allgemein die elektrische Dipolstrahlung als Hertzsche Dipolstrahlung.

Wir erhalten nun das elektromagnetische Feld der elektrischen Dipolstrahlung aus dem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  (XIII.55) mittels (XIII.48) und (XIII.49) als

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= ik(\mathbf{p} \times \nabla) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ &= k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \end{aligned} \quad (\text{XIII.57})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B} \\ &= ik \left\{ \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \nabla \left[ \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \right] \right\} \\ &= k^2 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left[ \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{ikr} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{XIII.58})$$

wobei weiterhin  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ .

Wir wollen nun zwei wichtige Grenzfälle dieser Formeln untersuchen.

- **Nahzone**,  $kr \ll 1$ :

Dabei betrachten wir die Felder nahe der oszillierenden Ladungsverteilung,  $r \ll \frac{1}{k}$ . In erster Näherung ergibt sich in diesem Grenzwert aus obigen Ausdrücken

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} e^{-i\omega t} \quad (\text{XIII.59})$$

$$\mathbf{B} = ikr \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{p}}{r^3} e^{-i\omega t}. \quad (\text{XIII.60})$$

Wir beobachten zunächst, daß hier zwischen den Feldern  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$  besteht, die sich im relativen Faktor  $i$  zeigt, denn  $ie^{-i\omega t} = e^{-i\omega(t-\frac{T}{2})}$  mit der Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Das elektrische Feld hat die bekannte Form eines elektrischen Dipolfeldes, das aber mit der Periode  $\omega$  oszilliert. Das magnetische Feld  $|\mathbf{B}|$  ist um einen Faktor  $kr \ll 1$  kleiner als  $|\mathbf{E}|$ . In der Nahzone liegt also hauptsächlich ein zeitlich periodisches elektrisches Dipolfeld vor.

Der zeitlich gemittelte Energiestrom, der von der Ladungsverteilung ausgeht, kann mit Hilfe des Poynting-Vektors bestimmt werden, vgl. Kapitel XI.1. Da das magnetische Feld sehr klein ist, ist auch der Energiestrom im Nahfeld sehr klein

$$\langle \mathbf{S} \rangle_t = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \simeq 0. \quad (\text{XIII.61})$$

• **Fernzone** oder **Wellenzone**,  $kr \gg 1$ :

Betrachten wir nun die Felder fern der oszillierenden Ladungsverteilung,  $r \gg \frac{1}{k}$ , so finden wir als führende Beiträge in (XIII.57) und (XIII.58)

$$\mathbf{B} = k^2 \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{p}}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (\text{XIII.62})$$

$$\mathbf{E} = k^2 \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n}}{r} e^{i(kr - \omega t)}. \quad (\text{XIII.63})$$

In der Fernzone haben elektrisches und magnetisches Feld die Form einer Kugelwelle. Hier tritt kein Phasenunterschied zwischen elektrischem und magnetischem Feld auf. Beide Felder fallen mit zunehmendem Abstand ab wie

$$|\mathbf{E}| \sim \frac{1}{r}, \quad |\mathbf{B}| \sim \frac{1}{r}, \quad (\text{XIII.64})$$

und es gilt

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{n}, \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|. \quad (\text{XIII.65})$$

Die Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes ergibt sich aus (siehe Abbildung)

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} = \mathbf{p} - \mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{p}_\perp \quad (\text{XIII.66})$$

und

$$|\mathbf{p}_\perp| = p \sin \theta. \quad (\text{XIII.67})$$

Abbildung

Damit erkennen wir, daß  $\mathbf{E}$  in Richtung der Projektion von  $\mathbf{p}$  auf die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{x}$  schwingt. Weiter erkennen wir, daß gemäß (XIII.65)  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} \perp \mathbf{x}$ . Die Felder in der Fernzone können durch folgendes Diagramm visualisiert werden.

Abbildung

Der zeitlich gemittelte Energiestrom in der Wellenzone ist

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S} \rangle_t &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \\
 &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[(\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{B}^*] \\
 &= \frac{c}{8\pi} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{n} \\
 &= \frac{ck^4 \mathbf{n}}{8\pi r^2} (\mathbf{n} \times \mathbf{p})^2 \\
 &= \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} \mathbf{p}^2 \sin^2 \theta \mathbf{n} \\
 &= \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} \mathbf{p}_\perp^2 \mathbf{n}.
 \end{aligned} \tag{XIII.68}$$

Die in das Raumwinkelement  $d\Omega$  abgestrahlte Leistung ist demzufolge

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d \frac{dW}{dt}}{d\Omega} = r^2 |\langle \mathbf{S} \rangle_t| = \frac{c}{8\pi} k^4 p^2 \sin^2 \theta. \tag{XIII.69}$$

Ein oszillierender elektrischer Dipol strahlt Energie also bevorzugt in Richtung senkrecht zur Dipolachse ab. Die Winkelverteilung der E1-Strahlung ist gegeben durch  $\sin^2 \theta$ , entsprechend folgendem Strahlungsdiagramm:

Abbildung

Die gesamte ausgestrahlte Leistung ist

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{dW}{dt} = \int \frac{c}{8\pi} k^4 p^2 \sin^2 \theta d\Omega \\
 &= \frac{c}{4} k^4 p^2 \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d \cos \theta \\
 &= \frac{c}{3} k^4 p^2.
 \end{aligned} \tag{XIII.70}$$

### XIII.3.b Magnetische Dipolstrahlung, elektrische Quadrupolstrahlung

## XIII.4 Thomson- und Rayleigh-Streuung

### XIII.4.a Thomson-Streuung

### XIII.4.b Rayleigh-Streuung

### XIII.4.c Das Blau des Himmels