Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
C. Ewerz | Wintersemester 2010/11

6. Übung zur Quantenmechanik II

Besprechung der Präsenzaufgaben: 17.-20.01.2011

Die Klausur zur Quantenmechanik II findet am Dienstag, 8. Februar 2011, um 11 Uhr s. t. in INF 227, Hörsaal 1, statt. Es stehen Ihnen dann 120 Minuten zur Bearbeitung der Klausur zur Verfügung. Bitte bringen Sie (unbeschriebenes) Papier und Schreibgerät sowie einen Lichtbildausweis mit. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

P 16 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (10 Punkte)

Wir wollen den Fock-Raum der Fermionen betrachten,

$$\mathcal{H}^F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^F \,, \tag{1}$$

worin $\mathcal{H}_0^F = \mathbb{C}$ und $\mathcal{H}_n^F$ für $n \geq 1$ die fermionischen n-Teilchen-Hilberträume sind. Die Skalarprodukte der n-Teilchen-Hilberträume sind für $\psi_n, \chi_n \in \mathcal{H}_n^F$ definiert als

$$\langle \psi_n \,|\, \chi_n \rangle = \int d^3\xi_1 \dots d^3\xi_n \, \psi_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n) \chi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \,, \tag{2}$$

wobei ein Integral über $\xi = (\vec{x}, r)$ die Integration der Ortskoordinate $\vec{x}$ über $\mathbb{R}^3$ und die Summation über die Spineinstellungen r darstellt. Das kanonische Skalarprodukt auf dem Fock-Raum ist für $\psi, \chi \in \mathcal{H}^F$ definiert als

$$\langle \psi \,|\, \chi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_n \,|\, \chi_n \rangle \ . \tag{3}$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger(\varphi)$ und $a(\varphi)$ sind für $\varphi \in \mathcal{H}_1$ Operatoren auf dem Fock-Raum: $a^\dagger(\varphi), a(\varphi) \,:\, \mathcal{H}^F \to \mathcal{H}^F$. Ihre Wirkung ist erklärt durch ihre Wirkung auf die n-Teilchen-Räume, aus denen der Fock-Raum besteht. Wir haben

$$\begin{aligned} a^\dagger(\varphi)\big|_{\mathcal{H}_n} &: \mathcal{H}_n^F \to \mathcal{H}_{n+1}^F \\ a(\varphi)\big|_{\mathcal{H}_n} &: \mathcal{H}_n^F \to \mathcal{H}_{n-1}^F \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist mit dem Antisymmetrisierungsoperator $\mathcal{A}_n = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\pi)\,\hat{\pi}$

$$\begin{aligned}(a^\dagger(\varphi)\psi_n)(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}) &:= \sqrt{n+1}\,\mathcal{A}_{n+1}\,\varphi(\xi_1)\psi_n(\xi_2,\ldots,\xi_{n+1})\\ (a(\varphi)\psi_n)(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) &:= \sqrt{n}\int d^3\xi\,\varphi^*(\xi)\,\psi_n(\xi,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\\ a(\varphi)\psi_0 &:= 0\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Wir nehmen an, daß $\{\psi_\nu\}$ mit $\nu\in\mathbb{N}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}_1$ bildet und bezeichnen $a_\nu := a(\psi_\nu)$ etc. (Vorsicht: Bei den obigen ψ_n steht das n für die Teilchenzahl, hier steht ν dagegen für die Abzählung der Basiselemente in $\mathcal{H}_1$.)

(a) Zeigen Sie, daß a_ν und $a_\nu^\dagger$ zueinander adjungiert sind, d. h. $(a_\nu)^\dagger = a_\nu^\dagger$.

(b) Wir betrachten die Determinante

$$\det(\psi_{\nu_1},\ldots,\psi_{\nu_n})(\xi_1,\ldots,\xi_n) := \sqrt{n!}\,\mathcal{A}_n\,\psi_{\nu_1}(\xi_1)\cdot\ldots\cdot\psi_{\nu_n}(\xi_n)\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, daß für die Wirkung von a und $a^\dagger$ auf diese Determinante gilt:

$$a_\nu \det(\psi_{\nu_1},\ldots,\psi_{\nu_n}) = 0 \qquad \text{falls} \qquad \nu\notin\{\nu_1,\ldots,\nu_n\} \tag{7}$$

und

$$\begin{aligned}a_\nu \det(\psi_\nu,\psi_{\nu_1},\ldots,\psi_{\nu_n}) &= \det(\psi_{\nu_1},\ldots,\psi_{\nu_n})\\ a_\nu^\dagger \det(\psi_{\nu_1},\ldots,\psi_{\nu_n}) &= \det(\psi_\nu,\psi_{\nu_1},\ldots,\psi_{\nu_n})\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Bemerkung: Aus der letzten Relation erkennt man, daß sich durch Anwenden von $a^\dagger$ aus einer $(n-1)$-Teilchen-Slaterdeterminante eine n-Teilchen-Slaterdeterminante ergibt. Daher lassen sich durch sukzessive Anwendung von $a^\dagger$ auf den Grundzustand $|0\rangle = (1,0,0,\ldots)\in\mathcal{H}^F$ alle Slaterdeterminanten erhalten:

$$\det(\psi_{\nu_1},\ldots,\psi_{\nu_n}) = a_{\nu_1}^\dagger\cdot\ldots\cdot a_{\nu_n}^\dagger\,|0\rangle\ . \tag{9}$$

(c) Zeigen Sie für die Antikommutatoren der a und $a^\dagger$ (optional)

$$\begin{aligned}\{a_\mu,a_\nu\} &= \{a_\mu^\dagger,a_\nu^\dagger\} = 0\,,\\ \{a_\mu,a_\nu^\dagger\} &= \delta_{\mu\nu}\mathbf{1}\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Hinweis: Beweisen Sie diese Relationen durch Anwenden der Operatoren $a_\nu, a_\mu^\dagger$ etc. auf Slaterdeterminanten und benutzen Sie die Relationen aus Teil (b). Da die Operatoren $a_\nu, a_\mu^\dagger$ etc. linear sind und sich jede antisymmetrische Wellenfunktion nach Slaterdeterminanten entwickeln läßt, sind die obigen Antivertauschungsrelationen damit allgemein gezeigt.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-10.html