Die Antinomien des Zenon von Elea

gelesen von einem modernem Physiker,
der auch an der Vergangenheit interessiert ist

h.g.dosch@gmail.com

1 Einleitung

In den Physikvorlesungen [1], schildert Aristoteles “vier Argumente (λόγοι) des Zenon über die Bewegung, dass das Sein unbeweglich” sei, die denen, die sie lösen wollen Schwierigkeiten machen [2]”.

“Was war der Zweck dieser berühmten Antinomien Zenos?”

Diese Frage stellt der Mathematiker und Mathematikhistoriker B. van der Waerden zu Beginn seiner Arbeit “Zenon und die Grundlagenkrise der Griechischen Mathematik” [3] Der Mathematiker H. Hasse und der Logiker H. Scholz sehen in Zenon, “der unter dem Einfluss des Aristoteles nur als scharfsinniger Sophist und Urheber von geistreichen Trugschlüssen gegolten hat” als “den produktivsten Kritiker der Mathematik seiner Zeit und überhaupt als einen der mathematisch produktivsten Nicht-Mathematiker aller Zeiten” [4]. Van der Waerden teilt die Einschätzungen von Hasse und Scholz nicht, da diese auf der Annahme basieren, Zenon’s Kritik habe sich hauptsächlich gegen den für die Mathematik “gefährlichen Seitenweg des Unendlichkleinen” gewandt; van der Waerden bestreitet nämlich, dass dieser gefährliche Seitenweg zur Zeit Zenon’s überhaupt bestand. Vielmehr bestand das Hauptanliegen des Zenon in der Verteidigung der Eleatischen Philosophie, wie der spätantike Neuplatoniker Elias [5] berichtet: “Er schloss aus vierzig Argumenten, dass das Sein Eines sei (ἓν τὸ ὄν) und “durch fünf [6] Argumente, dass das Sein unbeweglich sei (ἀκίνητον τὸ ὄν)”. Neben Argumenten aus der Geschichte der antiken Mathematik beruft sich dabei van der Waerden auch auf die Analyse der Eleatischen Philosophie durch Guido Calogero.

Allerdings wurde in der modernen Grundlagenkrise der Mathematik (ca 1900-1930) dem Zenon vor allen von philosophischer Seite so etwas wie die Rolle eines Schutzheiligen der Minderheit zugesprochen. Eine neuere Zusammenfassung dazu findet sich in dem Aufsatz von P. Ehrlich (2014).

Im folgenden sollen die Antinomien des Zenon gegen die Bewegung aus einer modernen Perspektive betrachtet werden. Dies ist in der Tat “ahistorisch”, aber auch notwendig, wenn man sie als originelle wissenschaftliche Aussagen betrachtet. Wie Michel Serres in “Les Origines de la Géométrie” bemerkte:

> Ou on rentre par des formations culturelles et on ne rencontre jamais la science comme mouvement original et véridique, ou en rentre par la

[1] Textgrundlage ist die Bekkersche Akademieausgabe, samt Paginierung und Zeilenzählung, im folgenden zitiert als **APV**; diese wird auch kritisch von A. Laks und G. W. Most benutzt, im folgenden zitiert als **LMZ**

[2] APV 239b, 9ff

[3] Waerden; p 141f

[4] Hasse, Scholz; p. 10ff

[5] LMZ, D3

[6] auf den Unterschied von der Zahl der Argumente bei Aristoteles und Elias komme ich zu Ende des Essais nocheinmal zurück

science même et on réinterprete sans cesse les formations culturelles [7].

Etwas direkter, aber dafür poetisch sagt dies Faust zu seinem Famulus:

> Mein Freund, die Zeiten der Vergangenheit
> Sind uns ein Buch mit sieben Siegeln.
> Was ihr den Geist der Zeiten heißt,
> Das ist im Grund der Herren eigner Geist,
> In dem die Zeiten sich bespiegeln.[8]

Ich wende mich also den Zenon'schen Argumenten als "mouvement original et veridique" zu, und gehe deshalb auf die Argumente des Aristoteles nicht ausführlich im Rahmen der Aristotelischen Physik ein, sondern nur kurz im Bezug auf die Zenonischen Argumente.

2 Die vier Argumente des Zenon gegen die Bewegung

Die vier bei Aristoteles aufgeführten Argumente des Zenon gegen die Bewegung sind[9]:

> 1) **Die Zweiteilung** [10]: Das erste <Argument>, das es keine Bewegung gebe ist, da das Getriebene (φερόμενον) doch zuerst die Mitte erreichen müsse vor dem Ziel
>
> 2) **Achilles** [11]: Das zweite <Argument> ist das "Achilles"genannte und es besagt, dass das Langsamste in seinem Lauf niemals vom schnellsten eingeholt werde: notwendigerweise müsse der Verfolger zuerst dahin kommen, von wo der Fliehende losgegangen war, also hat notwendigerweise der Langsamere immer etwas Vorsprung. Es ist dies aber auch das gleiche Argument wie das der Zweiteilung <d.h. Nr. 1>, es unterscheidet sich aber darin, dass die zugewonnene Grösse nicht zweigeteilt wird.

Diese beiden Aporien sind mathematisch am leichtesten zu klären und zwar mit klassischen Methoden der Euklidischen Mathematik. Im 9. Buch der Elemente des Euklid [12] wird sogar das allgemeine Resultat für die Summen von geometrischen Folgen, um die es sich hier handelt, abgeleitet. Dies kommt auch in der Widerlegung

[7] Serres, p. 33
[8] Goethe, p. 35
[9] in APV, Buch 6, Abschn. 9
[10] APV, 239b, 11ff; LMZ, D14
[11] APV, 239b, 14ff; LMZ, D15
[12] Euklid, Elemente, vol. 9, Satz 35

des Aristoteles [13] zum Ausdruck: Der Schnellere kann den Langsameren wohl einholen, wenn man sieht, dass der Vorsprung des langsameren nur auf einer begrenzten Strecke besteht.

Es liegt allerdings tatsächlich ein Problem hinter den Argumenten des Zenon, aber das betrifft nicht die Bewegung, sondern die Fragwürdigkeit des Begriffes einer "unendlichen Summe" oder "unendlichen Teilung", darauf komme ich nocheinmal ausführlicher zurück.

Da das Beispiel des Achilles offenbar besonders populär ist, möchte ich es etwas ausführlicher behandeln. Nehmen wir an Achilles (A) sei 10 mal schneller als der Langsame (L), wenn A in der Sekunde 10 Meter zurücklegt, dann der Langsame nur 1 Meter [14]. Nehmen wir ferner an, der Langsame habe einen Vorsprung von 10 Metern. Als 1. Etappe bezeichenen wir die Stelle, bei der A den Ausgangspunkt des L erreicht hat, dies findet in unserem Beispiel 1 Sekunde nach dem Start statt. L hat dann einen Meter zurückgelegt, also beträgt sein Vorsprung nur noch 1 Meter. Bei der 2. Etappe hat A insgesamt 11 Meter zurückgelegt , L aber nur L 1,1 Meter, der Vorsprung beträgt also nur noch 0,1 Meter. Allgemein hat A bei der N. Etappe die Strecke von $10 \cdot \frac{1-1/10^{N+1}}{1-1/10}$ Meter zurückgelegt; dies folgt direkt aus dem Resultat für **endliche** geometrische Reihen, s. App. 1. Zenon bemerkt zwar vollkommen zu Recht, dass bei jeder Etappe L einen Vorsprung hat, aber auch Aristoteles hat Recht wenn er sagt: Einen Vorsprung hat L nur über eine endliche Strecke, und wenn A diese endliche Strecke zurückgelegt hat, wozu er nur eine endliche Zeit braucht, dann bricht das Argument des Zenon zusammen, da dann L keinen Vorsprung mehr hat. Noch einfacher ist eine direkte Argumentation über die Zeit: Bis zur N. Station braucht A die Zeit von $\frac{1-1/10^{N+1}}{1-1/10}$ Sekunden,was stets, d.h. für alle Etappenm kürzer als $\frac{10}{9}$ Sekunden ist. Damit muss in einer mathematisch korrekten Formulierung die theatralische (τετραγῳδημένον) Aussage

> dass der Langsamste niemals vom Schnellsten eingeholt werden kann

durch das weniger spektakuläre

> dass der Langsamste nicht vor einer endlichen Zeit" (in unserem Beispiel nicht vor $\frac{10}{9}$ Sekunden) eingeholt werden kann

ersetzt werden.

Zenon hat, wie oben kurz angedeutet, allerdings in einem Punkte recht: L hat auch nach beliebig vielen Etappen immer noch einen Vorsprung, also hat A ihn auch nach beliebig vielen Etappen immer noch nicht eingeholt. Würde A bei jeder Ertappe eine noch so kurze, aber immer gleichlange, Pause machen, dann könnte er den L tatsächlich **niemals** einholen. Dass A den L genau nach $\frac{10}{9}$ Sekunden tatsächlich

[13] APV, 239b, 20ff, LMZ, R19

[14] Diese Prämisse muss erlaubt sein, denn wenn wir die Bewegung schon von vornherein ausschliessen, so brauchen wir überhaupt kein Argument

einholt, kann durch diese Verwendung der Summenformel für die endliche geometrische Reihe nicht geschlossen werden. Die obige Argumentation ergibt nur, dass er ihn nicht **vor** einer gewissen Zeit einholen kann.

Dies ist in diesem Zusammenhang allerdings nicht entscheidend, der genaue Zeitpunkt (oder Ort), an dem sie gleichauf sind, kann auf sehr viel einfachere Weise hergeleitet werden. Ob Zenon die Summenformel (noch) nicht kannte und er suggerieren wollte, dass eine unendliche Summe von endlich langen Intervallen stets eine unendliche Zeitspanne ergibt, ist eine interessante Frage.

Die Problematik wurde von Aristoteles mit bewundernswerter Klarheit erkannt:

> Im doppelten Sinne (λέγεται wird nämlich <räumliche> Länge (μῆκος) und Zeit, und überhaupt alles Zusammenhängende, unbegrenzt (ἄπειρον) genannt, entweder nach der Teilung (κατὰ διαίρεσιν) oder nach den Endpunkten (ἐσχάτοις). Es ist nicht möglich die nach Grösse (κατὰ τὸ ποσὸν) unbegrenzten in begrenzter Zeit zu berühren (ἅψασθαι), wohl aber die nach der Teilung < unbegrenzten > [15]

Die Widerlegung des Arguments der fortlaufenden Zweiteilung ist analog der Widerlegung des Arguments mit Achilles.

Die andauernde Poularität des Achilles-Paradoxes wird von James Clerk Maxwell als Beispiel für die Langsamkeit der Entwicklung wissenschaftlicher Ideen zitiert[16] "Bayle does not see any force in this statement of Aristotle < i.e. die potentiell unendliche Teilbarkeit der Zeit >, and continues to admire the paradox of Zeno (Bayle's Dictionary, art "Zeno" < 1694-1697 >).

Das 3. Argument lautet:

> 3) **Der Pfeil** [17] a) Er sagt: alles ist immer in Ruhe solange es an einem gleichen <sc. Ort > sei und das Getriebene (φερόμενον) ist immer im Jetzt, der getriebene Pfeil sei < daher > unbewegt.
>
> b) das dritte <Argument> wurde gerade erwähnt, dass der getriebene Pfeil still stehen bleibt [18].

Als Kern dieses Argumentes kann man betrachten, dass es in der Tat nicht möglich ist, einem Gegenstand an einem gewissen Ort und zu einer gewissen Zeit eine bestimmte Geschwindigkeit, ja überhaupt eine Bewegung zuzuschreiben.

Der Begriff der *Momentangeschwindigkeit* eines auf einer Bahnkurve bewegten Körpers ist allerdings so in unser Alltagsbewusstsein übergegangen, dass uns ohne Reflexion gar nicht mehr bewusst ist, dass es sich dabei um eine Abstraktion (im Sinne

[15] APV 233b, 24ff
[16] Encyclopedia Britannica, 9th ed. vol. III 1875-1898)
[17] APV 239b, 5ff; LMZ, D16
[18] LMZ, D17

Cassierers um eine *Symbolische Form*) handelt. Um nämlich zu sagen, dass sich ein Körper in Bewegung befindet, müssen wir wissen, dass er sich zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten befindet; die Geschwindigkeit ist als der Quotient der Ortsveränderung [19] und der Zeitspanne definiert. Daraus kann man allerdings noch keine Momentangeschwindigkeit, sondern nur eine *Durchschnittsgeschwindigkeit* über dieses Intervall bestimmen.

Auch Aristoteles scheint mir in seinem Urteil hier milder, da er das Wort *falsch* hier nicht benutzt. Aristoteles ist sich auch der Problematik voll bewusst, einem Gegenstand zu einem festen Zeitpunkt eine Bewegung zuzusprechen, wie dies aus einer etwas dunklen Stelle hervorgeht [20] : "Da das Bewegte in der Zeit bewegt wird, ... ist es unmöglich dass es in der Zeit, in der es eigentlich (καϑ αὑτὸν bewegt wird ... nach irgend etwas in erster Stelle ein bewegtes sei".

Bei der Widerlegung des Zenon geht Aristoteles aber auf diese Problematik nicht direkt ein, sondern er bemerkt:

> Das <Argument des Zenon> folgt aus der Annahme, dass die Zeit aus den Jetzten<Jetzt-Zeitpunkten> (ἐκ τῶν νῦν) zusammengesetzt sei. Wenn dies nicht zugegeben wird, gilt der Schluss nicht.

Trotz der logisch-begrifflichen Schwierigkeiten spielte (und spielt) in der Mechanik die Momentangeschwindigkeit eine zentrale Rolle, und die logischen Schwierigkeiten hatten, trotz berechtigter Einwände, auch keinen Einfluss auf die Entwicklung der Mechanik. Die Momentangeschwindigkeit wurde als der Quotient "unendlich kleiner" Raum- und Zeitintervalle definiert, obwohl man diese "unendlich kleinen" Grössen nicht so sauber definieren konnte, wie dies in der Mathematik sein sollte. Aber unabhängig von diesen Schwierigkeiten, die ihren Schöpfern, I. Newton und G.W. Leibniz, wohl bewusst waren, wurde die Differentialrechnung (*calculus*) zu einem wichtigen Zweig der Mathematik und das wichtigste Werkzeug der Theoretischen Physik.

Erst im 19. Jahrhundert, also etwa 200 Jahre nach ihren Anfängen, wurde die Differentialrechnung, hauptsächlich durch den Mathematiker Karl Weiserstrass, endgültig auf eine logisch saubere Basis gestellt. B. Russel sieht hier einen engen Zusammenhang mit der Zenon'schen Antinomie des Pfeiles:

> After two thousand years of continual refutation, these sophism were reinstated, and made the foundation of a mathematical renaisance, by a German professor [21]who probably never dreamed of any connection

[19]die Problematik der "Ortsveränderung" wird im dann im nächsten Argument thematisiert

[20] APV 239a, 23ff

[21]Es ist ziemlich sicher, dass "der deutsche Professor", nämlich Karl Weierstrass, auf Grund der damals üblichen Ausbildung am Gymnasium die Zenon'schen Argumente kannte. Sein Interesse an der klassischen Antike wird auch daraus deutlich, dass er einen Aufsatz Über die Sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte. verfasste. Cambridge Library Collection - Mathematics, pp. 315-330

> between himself and Zeno. Weierstrass, by strictly banishing all infinitesimals, has at last shown that we live in an unchanging world, and that the arrow, at every moment of its flight, is truly at rest. The only point where Zeno probably erred was in inferring (if he did infer) that, because there is no change, therefore the world must be in the same state at one time as at another [22]

Die “Verbannung unendlich kleiner Grössen” , die Russel anspricht, ist durch die saubere Definition des Grenzwertes durch die $\epsilon - \delta$ Metode (Epsilontik) möglich. Diese Methode ist erstaunlich einfach, und es erscheint mir sehr merkwürdig, dass sie bei denen, die keine Vorlesung über mathematische Analysis gehört haben, so wenig bekannt ist. Sie ist deshalb im Anhang 2 kurz geschildert.

Der *Kern des 4. Arguments* ist nach meiner Auffassung die Aussage: “Es gibt keine ‘wahre’ Geschwindigkeit “. Es wird in den Physikvorlesungen des Aristoteles überliefert als:

> **Das Stadion (Rennbahn)** [23] Das vierte aber ist das über die im Stadion entgegengesetzt bewegter einander gleicher Körper (ὄγκων), die einen vom Ende des Stadions, die anderen von der Mitte, mit gleicher Geschwindigkeit (ἴσῳ τάχει). Aus diesem glaubt er, dass folge, dass die halbe Zeit gleich der doppelten sei [24].

Während bei den vorigen drei Argumenten des Zenon Aristoteles eine kurze und prägnante Fassung der Argumentation des Zenon angibt, beschränkt er sich hier auf die Schilderung der Situation und fährt dann gleich mit seiner eigenen Auslegung und Widerlegung [25] fort:

> Der Paralogismus besteht darin, dass er postuliert, dass ein und dieselbe Grösse dieselbe Zeit brauche, wenn sie einerseits an einem Bewegten, andererseits an einem Ruhenden mit gleicher Geschwindigkei vorbeibewegt werde. Das ist aber falsch.

Diese Aussage des Aristoteles ist tatsächlich unter der Annahme richtig, dass man die Geschwindigkeit immer auf das gleiche Bezugsystem, z. B. den Boden des Stadions bezieht; das Postulat findet sich in der angegebenen Form allerdings nicht in der Lagebeschreibung des Paradoxes“Das Stadion”, die dem Zenon zugeschriebenen wird.

---

[22] B. Russel, The Principles of Mathematics, pp 347 ff

[23] APV 239b, 33ff; LMZ D18 s. auch LMZ D19

[24] Da dieses Argument so wichtig ist, sei es hier im Originaltext gegeben: τέταρτος δ’ ὁ περί τῶν ἔν τῷ σταδίῳ κινουμένον ἐξ ἐναντίας ἴσον ὄγκων παρ’ ἴσους τῶν δ’ ἀπό τέλους τοῦ σταδίου, τῶν δ’ἀπό μέσου, ἴσῳ τάχει

[25] APV 240a, 1ff, LMZ R21

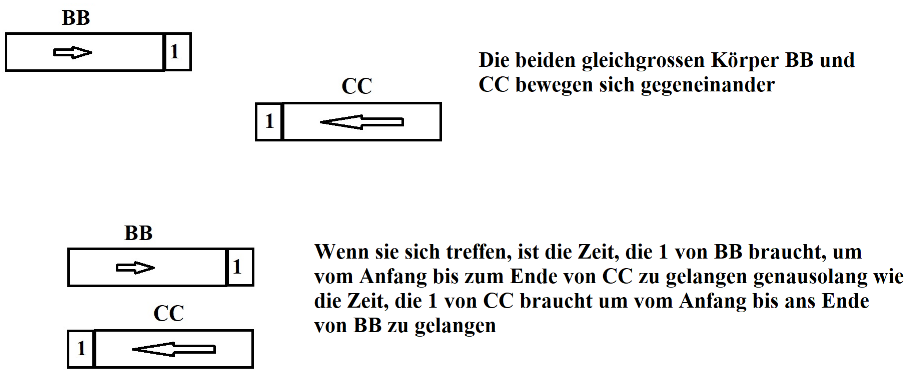

Abbildung 1:

Nach Lax und Most ist der Text der Widerlegung des Aristoteles [26] "schwer zu ermitteln und die Rekonstruktion des Arguments ist kontrovers". Der Text lautet (die Übersetzung folgt weitgehend folgend Laks und Most):

> Nennen wir z. B. AA die gleichen Körper die stehen; BB diejenigen, die von der Mitte ausgehen, diesen gleich an Zahl und Grösse; CC diejenigen die vom Rande ausgehen. diesen gleich an Zahl und Grösse und gleich schnell wie die B. Es folgt aber, dass der erste B zu gleicher Zeit am letzten $<$ von C [27] $>$ ist, wie das erste von C $<$ am letzten von B [28] $>$ da sie sich gegenläufig bewegen.

Diese Aussage ist so richtig und gilt immer, da die beiden Körper BB und CC gleich lang sind und damit die beiden Enden zu gleicher Zeit übereinstimmen müssen, siehe Abb. 1 Daraus folgt aber auch, dass die beiden Relativgeschwindigkeiten den gleichen Betrag haben, denn es dauert genausolang bis der Anfang von B am ganzen C vorbeikommt, wie es dauert, bis der Anfang von C am ganzen B vorbeikommt. Das bedeutet aber auch, dass die Relativgeschwindigkeiten (genauer ihre Beträge) zweier Körper gegeneinander vom Bezugsystem unabhängig sind. [29] Es kann sehr gut sein, dass diese richtige Aussage direkt von Zenon selbst stammt und es ist nicht ohne logische Begründung, dass seine Prämisse "mit gleicher Geschwindigkeit" sich eben auf die Relativgeschwindigkeiten der Körper bezieht. Die gleichen Relativgeschwindigkeiten der beiden Körper implizieren aber keineswegs, dass die Geschwindigkeiten gegenüber einem dritten System, z.B. dem Boden des Stadions, gleich sein müssen, die Gruppe C kann also doppelt so schnell auf dem Boden laufen wie B und deshalb zu gleicher Zeit an den Rändern des Stadions ankommen.

[26] LMZ R21

[27] ergänzt in LMZ R21

[28] eigene Ergänzung analog zu voriger in LMZ R21

[29] Seien $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ die gerichteten Geschwindigkeiten der Körpers B, C bezogen auf irgendein Bezugsystem, dann ist der Betrag der relativen Geschwindigkeit von A bezogen auf B, nämlich $|\vec{v}_A - \vec{v}_B|$, gleich dem Betrag der Relativgeschwindigkeit von B bezogen auf A: $|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = |\vec{v}_B - \vec{v}_A|$. Diese Aussage gilt **absolut**, d.h. unabhängig von der Wahl des Bezugssystems, in dem v_A und v_B gemessen werden.

Aristoteles fährt fort:

> Es passt aber dass das C entlang aller A hindurchging, die B aber entlang der Hälfte, somit wäere die Zeit die Hälfte, denn gleich ist jeder einzene einem jeden. Gleich passt es auch, dass die B an allen C vorbeigehen. Gleichzeitig ist auch das erste C und das erste B bei den entgegengestzten Enden < des Stadions >, – <da ja > wie er sagt die gleiche Zeit verfliesse entlang jedem der B wie jedem der A. – da die gleiche Zeit verfliesse für beide entlang A. Dies ist die Schlusskette, die zu jenem Fehler passt.

Ich will nicht versuchen, einen Sinn aus diesem letzten Teil, herauszulesen, zumal keineswegs klar ist, was auf Zenon und was auf Aristoteles zurückgeht. Es macht aber durchaus Sinn ihn so zu rekonstruieren, dass BB am halben AA vorbeiging, CC aber am ganzen, denn dies würde bedeuten dass die Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Boden des Stadions, auf dem die AA stehen bei BB nur die Hälfte der von CC ist. Eine kurze Version des Arguments von Zenon **könnte** sein:

Zwei Körper bewegen sich in entgegengesetzter Richtung durch ein Stadion, sie haben also gleiche Geschwindigkeit [30]. Der eine startet von der Mitte, der andere vom Ende. Beide kommen aber zu gleicher Zeit an den jeweiligen Enden des Stadions an [31] Da der eine Körper die doppelte Strecke durchlaufen hat wie der andere, ist die Hälfte der Zeit gleich ihrem doppelten [32].

Man kann es einen Sophismus oder eine tiefe Einsicht in die komplexe Berifflichkeit der Bewegung nennen, dass Zenon hier bewusst einmal, mit gutem Grund, die Relativgeschwindigkeit der beiden Körper benutzt (ἴσῳ τάχει), aber bei seinem Schluss dann zur Geschwindigkeit im landläufigen Sinne, d.h der Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Stadionboden, wechselt. Die Problemgeschichte des Begriffes *Geschwindigkeit*, siehe Abschn. 2.1, scheint mir zu zeigen, dass es eher eine tiefe Einsicht ist.

Aristoteles selbst erwähnt niemals, auf welches Bezugsystem er seine Geschwindigkeit bezieht. Vermutlich ist für ihn wahre Geschwindigkeit (und Ruhe) immer bezogen auf den Erdboden, ein nur in einem geozentrischen Weltbild sinnvoller Ausgangspunkt, das selbst in der Antike nicht von allen Denkern akzeptiert wurde[33]. Aber wie bereits in der Einleitung erwähnt, wage ich nicht, auf die "Aristotelischen" Argumente des Aristoteles näher einzugehen.

Es fällt offenbar sehr leicht, zuzugeben dass Lagebestimmungen immer relativ sind, aber es ist offenbar viel schwerer zuzugeben, dass die Geschwindigkeit keine absolute Grösse ist. Selbst ein so überlegener Geist wie Leibniz ist letztlich an dieser

[30] dass er sich hier auf die Relativgeschwindigkeit bezieht hat seinen guten Grund, denn sie ist unabhängig vom Bezugsystem

[31] Hier wird angenommen, dass die Geschwindigkeit von C doppelt so gross ist wie die von B, wenn sie gegnüber dem Stadionboden gemessen wird, was mit gleicher (Relativ-)Geschwindigkeit durchaus vereinbar ist.

[32] Es lohnt nicht zu diskutieren, ob 1/2 "=" 1" oder 1/2 "=" 2 gemeint ist

[33] vgl. Aristoteles, vom Himmel, Buch II, Abschn. 13, Edition Bekker 284b, 7ff

Antinomie gescheitert, wie später (Abs. 2.1 gezeigt wird. Auch ist die Relativität der Bewegung tatsächlich ein gutes Argument für die Eleatische Philosophie. Nach Elias war es ja das Ziel Zenons, zu zeigen dass das *Sein unbeweglich sei*, und man kann sich tatsächlich schwer darauf festlegen, gegen welches Bezugsystem die Geschwindigkeit des Seins denn zu messen sei.

Antinomie in Mechanika, 24 (*rota Aristotelis*) [34]

In den (Pseudo-)Aristotelischen Mechanika wird in Abschnitt 24 das folgende Problem behandelt: Wenn zwei Räder getrennt abgerollt werden, verhalten sich die beiden vom Mittelpunkt zurückgelegten Strecken zueinander wie ihre Radien. Wenn sie in der gleichen Zeit die gleiche Strecke zurücklegen sollen, muss sich also das kleine Rad schneller drehen. Wenn sie aber fest auf derselben Achse sitzen, so drehen sie sich gleichschnell und legen dennoch dieselbe Strecke zurück. Im Verlauf der Diskusion wird dann ausgeführt:

> Wenn nun also der große (Kreis) den an ihm befestigten kleinen bewegt, bewegt sich der kleine ebenso weit wie dieser; und wenn der kleine < den an ihm befestigten großen bewegt, bewegt sich> der große wieder so weit wie dieser. Getrennt aber bewegt jeder von den beiden sich selbst. Daß sie bei demselben Zentrum und Bewegung mit derselben Geschwindigkeit eine ungleiche Strecke durchlaufen, wäre bei diesem Problem (ἀπορῶν) ein falscher sophistischer (σοφιστικῶς) Schluß [35].

Die Struktur ist ähnlich wie beim 4. Paradoxon des Zenon, denn auch dort ist der Ausgangspunkt, dass mit gleicher Geschwindigkeit eine ungleiche Strecke durchlaufen wird. Aber im Gegensatz zu dem Stadion-Argument des Zenon, dem eine wichtige begiffliche Schwierigkeit, nämlich die Frage nach der wahren Bewegung zugrunde liegt, ist hier die falsche Prämisse leicht zu finden, es gibt hier gute **physikalische** Gründe für die unterschiedliche Beweglichkeit. Dies wird von Verfasser der Mechanik auch richtig erkannt

> Denn es ist dasselbe Zentrum für beide, aber akzidentell, wie musisch oder weiß (sc. als Prädikationen eines Menschen). Denn obwohl jeder der beiden Kreise ein Zentrum hat, nutzen sie nicht dasselbe. Wenn der bewegende der kleine ist, dann sind Zentrum und Prinzip wie die seinen, wenn aber der große, wie die seinen. Dasselbe (sc. Zentrum) bewegt also nicht schlechthin, sondern nur auf eine bestimmte Weise [36].

Modern ausgedrückt: Wenn das Zentrum des kleinen Kreises bewegendes Prinzip ist, dann *rollt* er (der grosse Kreis dreht dabei durch), wenn der grosse Kreis rollt, schleift der kleine.

---

[34] s. auch Dosch,Schmidt

[35] Aristoteles, Mechanik, 856a28 ff

[36] loc. cit. 856a 31ff

2.1 Das Problem der *wahren Geschwindigkeit* in der Neuzeit.

Ich hatte bereits erwähnt, dass schon in der Antike erkannt wurde, dass die ersten beiden Argumente des Zenon gegen die Bewegung, nämlich das der unendlichen Teilung und das mit Achilles auf mathematisch leicht widerlegbaren Annahmen beruhten. Das 3. Argument, das mit dem Pfeil, berührte ein wichtiges Problem, nämlich das der *Momentangeschwindigkeit*. Es war ein zentraler Punkt der Mechanik im 16. und 17. Jahrhundert, wurde aber mathematisch befriedigend erst im 19. Jh. gelöst. Hier will ich nun zeigen, dass die Diskussion über die wahre (oder absolute) Geschwindigkeit, (Argument 4, das des Stadions) seit dem Beginn der modernen Physik im 17. Jh. eine sehr wichtige Rolle spielte, und nicht aufhört, diese zu spielen.

Descartes war einer der einflussreichsten Philosophen der Neuzeit, sowohl in positiver als auch in negativer Hinsicht. Wäre die Bewunderung für Descartes unter den aufgeschlossenen Intellektuellen in Grossbritanien genauso gross gewesen wie auf dem Kontinent, so hätte die Welt wohl noch einige Zeit auf die neuzeitliche Physik warten müssen. Tatsächlich konnte die Newton'sche Physik nur durch die Befreiung von Cartesischen Dogmen entstehen. Hierbei spielt gerade die Bewegungslehre eine entscheidende Rolle.

Descartes' Standpunkt ist eindeutig [37] Er sagt über die alltägliche Auffassung von der Bewegung:

> Die Bewegung also, wie sie gemeinhin (vulgo) angenommen wird, ist nichts anderes als die Tätigkeit (actio) durch die ein Körper von einem Ort zu einem anderen wandert (migrat).[38]

Aber wenn wir nicht nach dem gewöhnlichen Gebrauch, sondern nach der Wahrheit der Sache betrachten, was über die Bewegung verstanden werden muss, dann gilt:

> Wir müssen sagen, sie sei *die Überführung (translatio) eines Teils der Materie, d.h. eines Körpers, aus der Nachbarschaft derjenigen Körper, die jenen direkt berühren und die wir als ruhend betrachten, in die Nachbarschaft von anderen.*[39]

dass Descartes die Möglichkeit einer *wahre Bewegung* ablehnt, wird einige Zeilen später im gleichen Abschnitt 25 klar:

> Und ich sage, dass es eine Überführung [40] sei, nicht eine Tätigkeit oder Kraft, die überführt, wie ich zeigen werde, dass jene <sc Bewegung> immer im Beweglichen ist, nicht im Bewegenden ... <auch werde ich zeigen> dass sie eine Eigenschaft, nicht eine Substanz sei (rem aliquam subsistentem) ....

[37] R. Descartes: Les Principia Philosophiae, Amsterdam 1644

[38] Descartes, Principia, II, 24

[39] Descartes, Principia, II, 25

[40] *translatio* stimmt mit der Bezeichnung φερόμενον für den bewegten Körper, die sich in den Argumenten des Zenon findet, direkt überein

Mit diesen Aussagen Descartes' setzt sich Newton in einem Manuskript [41] auseinander, das er vermutlich mit etwa 30 Jahren verfasste. Die Kritik an Descartes ist vernichtend, gerade im Hinblick auf dessen Princia Philosophiae II, 24 und 25 schreibt er[42]:

> Wie konfus und mit der Vernunft unvereinbar diese Lehre ist, davon überzeugen nicht nur die Konsequenzen, sondern auch dass Cartesius selbst zu erkennen scheint, dass er sich selbst widerspricht .

Diese Kritik stützt sich hauptsächlich auf die recht vage Bedeutung der Bewegung der Himmelskörper in dem kosmologischen Modell Descartes' im 3. Buch der Principia Philosophiae. Dort passt in der Tat manchmal die "philosophische" und manchmal die "gemeine" Bedeutung von Bewegung besser zur seiner (Descartes') Theorie. Auch gibt der Bezug der Bewegung auf die "Nachbarschaft der Körper, die ihn unmittelbar berühren" guten Anlass zu beissender Kritik.

Natürlich ist die Theorie der Bewegung nicht zu trennen von einer Theorie des Raumes. Da es hier aber nur darauf ankommt, zu zeigen wie kontrovers die Bewegung auch noch in der Neuzeit diskutiert wurde, will ich darauf nicht näher eingehen, sondern nur kurz auf den Unterschied zwischen einer Raumtheorie, die zu einer Ablehnung der wahren Bewegung und der, die zu einer Bejahung derselben führt. Betrand Russell schreibt:

> Es gibt zwei grosse Typen von Raumtheorie, die eine wird repräsentiert durch Newton, die andere durch Leibniz. ... Beide resultieren aus einer Betonung der einen oder der anderen der beiden folgenden Ideen: Wenn wir zwei Punkte nehmen, haben sie
> 1) eine Entfernung, welche einfach eine Beziehung zwischen den beiden ist.
> 2) eine tatsächliche Länge, die aus so viel Raum besteht und sich von A nach B erstreckt. [43]

Das wohl bedeutendste und einflussreichste naturwissenschaftliche Werk, dass je verfasst wurde, sind Newton's "Mathematischen Prinzipien der Philosophie der Natur" . Es ist nicht nur die Grundlage der neuzeitlichen Physik, sondern hatte auch, z. B. über Locke, Hume und Kant, einen bedeutenden Einfluss auf die neuere Erkenntnistheorie. Bei Newton gibt es keine Zwiedeutigkeiten. In dem Scholion zu Definition 8 steht klar:

> II Der absolute Raum, seiner Natur nach ohne Beziehung zu irgend etwas Äusserem, bleibt immer ähnlich (similare) und unbewegt ...
> IV Die Absolute Bewegung ist die Überführung eines Körpers von einem absoluten Platz in einen < anderen> absoluten Platz ...

[41] Isaac Newton, MS 4003
[42] loc. cit. p. 3
[43] B. Russell, Leibniz, Kap. IX

Die Bedeutung der absoluten Bewegung wird nochmals am Ende des Scholions hervorgehoben:

> Die wahren Bewegungen aber aus deren Ursachen, Wirkungen und offenbaren Unterschieden zu erhalten (colligere), und umgekehrt die Ursachen aus den Bewegungen, sei es aus wahren oder sei es aus den offensichtlichen (apparentibus), wird im folgenden gezeigt. Zu diesem Ende nämlich habe ich das folgende Buch verfasst.

Der von Newton so harsch kritisierte Descartes fasste den Raum relationistisch auf, und die meisten Gelehrten auf dem Kontinent sind ihm darin gefolgt. In seinen Anmerkungen zu den (ersten 2 Büchern der) Principia Philosophiae des Descartes zeigt sich aber, wie sehr Leibniz es als Nachteil empfindet, dass eine relationistische Raumtheorie der Existenz einer wahren Bewegung entgegensteht. So schreibt er zu dem Abschnitt II, 25:

> Wenn die Bewegung nichts anderes ist, als die Veränderung der Berührung oder der unmittelbaren Nachbarschaft (mutatio contactus seu viciniae immediatae), so folgt, dass man niemals definiern kann, welches Ding sich bewegt. ...... Die Konsequenz daraus wird sein, dass es keine wahre Bewegung gibt (motum realem esse nullum). Daher fordern wir, dass man sagt etwas bewege sich, nicht nur dass es seine Lage im Bezug zu anderen ändert, sondern auch, dass als Ursache der Änderung eine Tätigkeit, Kraft in ihm selbst sei. [44]

Der letzte Satz steht in klarem Widerspruch zu den Aussagen des Descartes im Abschnitt 25. s.o. .

Der grosse Mathematiker und Physiker Ch. Huygens, der Leibniz in die Mathematik eingeführt hatte, stand mit diesem in regem Briefwechsel [45]. Obwohl Huygens Descartes kritisch gegenüberstand, widerspricht er Leibniz energisch im Bezug auf die Bewegung [46]:

> ...in Ihren Bemerkungen zu Descartes habe ich bemerkt, dass Sie glauben es sei unstimmig (absonum), dass es keine wahre Bewegung gebe, sondern nur eine relative. Das halte ich dagegen für ganz sicher (tres constant) ...

Die Antwort von Leibniz [47] zeigt die wahre Komplexität der Verhältnisse, die auch den grossen Logiker Leibniz letztlich ratlos macht:

[44] G.W. Leibniz, Animadversiones, p. 48
[45] G.W. Leibniz, Briefwechsel Hugens
[46] loc. cit. , Brief von Huygens an Leibniz vom 29. Mai 1694
[47] loc.cit. Brief vom 12/22 Juni 1694

> Was den Unterschied zwischen der absoluten und der relativen Bewegung betrifft, so glaube ich, dass wenn die Bewegung, oder vielmehr die bewegende Kraft der Körper, wirklich (reel) ist, was man anerkennen muss, wie es scheint, dann muss sie sicher ein *Subjekt* haben . Denn wenn a und b sich nähern, gebe ich zu dass alle Phänomene gleich ablaufen, in welchen man auch immer die Bewegung oder die Ruhe setzte; auch wenn es 1000 Körper wären, stimme ich zu dass die Phänomene uns nicht erlauben könnten (selbst nicht den Engeln) einen unumstösslichen Grund zu geben um das Subjekt der Bewegung oder seine Stärke zu bestimmen.

Im berühmten Briefwechsel zwischen dem Anhänger und Vertrauten Newtons, Samuel Clarke, und Leibniz (1715-1716) [48] geht es hauptsächlich um theologische und begriffliche Konsequenzen der verschiedenen Raumbegriffe, erst in seinem letzten Schreiben, geht Leibniz auf die dynamischen Einwände von Newton/Clark ein.

> Ich habe nichts in der achten Definition der Mathematischen Prinzipien der Natur, und auch nicht im Scholion zu dieser Definition gefunden, das die Realität des Raumes an sich beweist oder beweisen könnte. Dennoch stimme ich zu, dass es einen Unterschied gibt zwischen einer absoluten wahren (absolu veritable) Bewegung, und einer einfachen relativen Änderung der Lage im Bezug auf einen anderen Körper. Denn wenn die unmittelbare Ursache der Änderung im Körper ist, dann ist er wahrhaft in Bewegung; also wird sich die Lage der anderen Körper im Bezug auf ihn ändern, obwohl die Ursache der Bewegung keineswegs in ihnen liegt [49].

Dies ist in Übereinstimmung mit seinen Bemerkungen aus dem mehr als 20 Jahre vorher verfassten Brief an Huygens, allerdings geht Leibniz nicht auf die Unmöglichkeit ein, die wahre von der relativen Bewegung durch Beobachtung zu unterscheiden obwohl der Hinweis auf die Engel bei dem Theologen Clake passender gewesen wäre als bei dem Mathematiker und Physiker Huygens.

Da die "Newtonsche Physik" in der Folgezeit glänzende Triumphe feierte, verlor die kritische Frage nach der absoluten Bewegung rasch an Bedeutung. Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts setzte sich Ernst Mach, ein Physiker mit antimetaphysischen Affekten, erneut mit dieser Frage auseinander. Er stellte fest, dass immer, wenn wir wahre Bewegungen (im Sinne Newtons) feststellen, sich dies auch am äusseren Bezugsystem erkennen lässt. Mach schlägt daher vor, die absolute Bewegung als eine relative , and den Fixsternen als ''ruhende" Bezugspunkte orientierte Bewegung zu interpretieren [50] (Mach'sches Prinzip).

Manchmal wird in der Literatur der Eindruck erweckt, als sei durch die Einstein'sche Allgemeine Relativitätstheorie die Frage nach wahrer und (nur) relativer Bewegung

[48] Leibniz, Streitschriften Clarke
[49] loc. cit. zu 13, Abschn. 53
[50] Mach, Mechanik, p. 216f

eindeutig zugunsten der relativen Bewegung entschieden. Die Situation ist aber nicht so einfach[51], aber darauf einzugehen wäre ohne grösseren mathematischen und astrophysikalischen Aufwand nicht möglich. Es soll genügen zu sagen, dass die im Problem des Stadions aufgeworfene Frage nach zweieinhalb Jahrtausenden immer noch ihre Brisanz bewahrt hat.

3 Zusammenfassung

Die direkten Aussagen Zenons sind bei allen Argumenten provozierend, da sie der direkten Erfahrung widersprechen. Allerdings weisen die im 3. und 4. Argument angesprochenen Schwierigkeiten auf Probleme hin, die in der Entwicklung sowohl der Mathematik als auch der Physik eine bedeutende Rolle spielten. Die in den (pseudo-Aristotelischen) Mechanika aufgeführte Antinomie hat zwar eine Struktur, die ähnlich der Zenonschen 4. Antinomie ist, kann aber gelöst werden. Dennoch scheint es mir möglich, dass sie im Laufe der Zeit als eine von fünf Antinomien betrachtet wurde, von denen der spätantike Philosoph Elias berichtet.

Argument 1 und 2 (Zweiteilung und Achilles) wurden schon in der Antike von Aristoteles mathematisch befriedigend gelöst und spielten daher in der Kinematik der Neuzeit keine Rolle mehr. Das 3. Argument weist darauf hin, dass es im Grunde unmöglich ist, einem Gegenstand zu einer bestimmten Zeit eine bestimmte Geschwindigkeit zuzuschreiben. Diese Schwierigkeit hatte eigentlich auch Aristoteles erkannt hat, wie oben dargelegt, s. Anm.20. Bei der Widerlegung des Xenon beruft er sich aber darauf, dass ein endliches Intervall nicht aus Zeitpunkten besteht, ebenfalls ein tiefsinniges Argument. Das von Zenon direkt aufgeworfene Problem im 3. Beispiel dagegen wurde praktisch mit der Differentialrechnung zu Ende des 17. Jahrhunderts geloest und im 19. Jahrhundert auch mathematisch befriedigend geklärt, siehe Fussnote 22.

Das 4. Argument, das vom Stadion, stellt sich, obwohl es scheinbar leicht zu lösen ist, als das tiefsinnigste heraus und weist auf eine Antinomie hin, die noch immer nicht befriedigend gelöst ist: Wie kann man die Früchte einer absoluten Bewegung geniessen, ohne die Kröte des absoluten Raumes schlucken zu müssen?

Es ist wohl eine jener harten Speisen, an denen selbst der Teufel manche tausend Jahre kaut, um dann zu sagen:

> Daß von der Wiege bis zur Bahre
> Kein Mensch den alten Sauerteig verdaut![52]

Danksagungen ...

[51] s. z.B. Dosch, Leibniz
[52] Goethe, p.85

4 Appendix 1

Die geometrische Reihe Eine geometrische Folge ist einer Folge, bei der das Verhältnis aufeinanderfolgender Terme stets gleich bleibt Die Summe einer geometrischen Folge über endlich viele Glieder war im klassischen Griechenland bekannt und die allgemeine Formel dafür findet sich im 9. Buch der Elemente des Euklid, Satz 35 [53], wo sie in klassischer Strenge hergeleitet wird. Es lässt sich aus dieser Formel auch leicht sehen, dass auch eine unbegrenzte Summe von Termen einer abnehmenden geometrischen Folge eine feste Zahl nicht überschreiten kann.

Sei $\{A,\, B,\, D,\, F \cdots\}$ eine geometrische Folge von Zahlen, d.h. aufeinanderfolgende Zahlen haben stets das gleiche Verhältnis: $B/A = D/B = F/D = \cdots = q$, d.h. $B = q \cdot A$, $D = q^2 \cdot A$, $F = q^3 \cdot A, \cdots$ Eine Summe der ersten $M+1$ Zahlen einer geometrischen Folge bezeichnen wir als geometrische (Partial-)Reihe:

$$\Sigma[M] = A + q \cdot A + q^2 \cdot A + \cdots + q^M \cdot A \tag{1}$$

Es gilt:

$$\Sigma[N] \cdot q + A = \Sigma[N] + q^{N+1} \cdot A \qquad \text{oder} \quad \Sigma[N] \cdot (1-q) = (1 - q^{N+1}) \cdot A \tag{2}$$

Dividiert man beide Seiten durch $\Sigma[N]$ so erhält man:

$$(A - q \cdot A) : A = (A - q^{N+1} \cdot A) : \Sigma[N] \tag{3}$$

Wenn A positiv ist, und q kleiner als 1, so sind alle auftretenden Grössen positiv und können als Verhältnisse von Strecken interpretiert werden. In diesem Falle folgt, dass auch für eine beliebig grosse Anzahl von Summanden stets $\Sigma[N]$ beschränkt bleibt, noch spezifischer $\Sigma[N]$ ist stets kleiner als $(1 - q^{N+1}) \cdot A : (1-q)$

Ist q grösser als 1, so bringen wir (4) in die ebenfalls richtige Form:

$$(q-1) = (A - q \cdot A) : A = (q^{N+1} \cdot A - A) : \Sigma[N] \tag{4}$$

Die Formel (4) ist der Inhalt von Satz 35 vom 9. Buch der Euklidischen Elemente:

> Es sei eine Folge von Zahlen gleichen Verhältnisses (ἀριηϑμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον) < d.h. eine geometrische Folge >, von denen <sowohl> von der zweiten <als auch > von der letzten <die Zahl, die > gleich der ersten ist, weggenommen werde, dann verhält sich der Überschuss der zweiten zur ersten <Zahl> gleich dem Überschuss der letzten zur Gesamtheit (Summe) derselben < d.i. der vorigen Zahlen> [54]

[53]Euklid, Elemente

[54]Der Text ist nicht ganz einfach zu lesen, daher sei er nochmals in moderner Notation, bei dem Zahlen durch Buchstaben widergegeben werden, sinngemäss wiederholt: Sei $\{a,\, a \cdot q,\, a \cdot q^2 \;\ldots\ldots\; a \cdot q^N\}$ eine geometrische Folge; von der zweiten und der letzten Zahl der Folge wird wird jeweils die erste Zahl weggenommen, d.h. wir erhalten die zwei Überschüsse $a \cdot q - a$ und $a \cdot q^n - a$. Dann gilt: $(a \cdot q - a) : a = (a \cdot q^n - a) : (a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots a \cdot q^{N-1})$. Dies ist das Resultat (3 bzw. 4).

Die im auf Verhältnissen von Strecken beruhende Herleitung in den Elementen des Euklid ist etwas umständlicher als die oben angegebene algebraische Herleitung, und sie nimmt an, dass die Zahlen der geometrischen Folge anwachsen, d.h. q ist grösser als 1. Er lässt sich aber leicht auf den Fall, dass die Folge abnimmt, d.h. q ist kleiner als 1, übertragen, allerdings ist dann q notwenigerweise eine Bruchzahl. Die Argumentation des Aristoteles lässt darauf schliessen, dass auch ihm schon die Konsequenzen von (3) bekannt waren. In der Tat findet sich in der Stelle

> Wenn man nämlich aus einer bestimmten Grösse etwas genau bestimmtes herausnimmt nach dem gleichen Verhältnis – aber nicht zum Ganzen – zusammenfügt, dann wird man die bestimmte Grösse nie auschöpfen [55]

eine Beschreibung einer geometrischen Reihe bei der $q = 1/n$ ist, d h. $A/n + A/n^2 + A/n^3 + \dots A/n^N = A\,\frac{1/n - 1/n^N}{1-1/n}$ die von der Reihe $A/n + A/n + A/n \dots$ zu unterscheiden ist, da sie die ganze Grösse A nach $N = n$ Schritten ausschöpft [56]

5 Appendix 2

Der Grenzwert Der Begriff Grenzwert hat in der Alltagssprache zwar eine recht eindeutige Bedeutung, er spielt aber auch in der mathematischen Analysis eine entscheidende Rolle. Es ist deshalb erstaunlich, dass er erst im 19. Jahrhundert mathematisch scharf gefasst wurde. Die dabei benutzte Methode ist die der "Epsilontik", die in ihrer endgültigen Formulierung auf Weierstrass zurückgeht [57]

Sei $f(x)$ eine Funktion von x. Der Grenzwert der Quotientenfunktion $q(x,\Delta) = \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$ hat für jeden festen Wert von x und beliebig kleines Δ den Wert $f'(x)$, (Ableitung von f) wenn es zu jeder (kleinen) Zahl ϵ eine Zahl δ gibt, dass der Betrag der Differenz $|q(x, De) - f'(x)|$ für alle Werte von $\Delta \leq \delta$ kleiner ist als ϵ.

Ein einfaches Beispiel:

$$\text{Sei } f(x) = x^2; \quad \text{dann ist} \quad q(x,\Delta) = \frac{x^2 + 2\Delta x + \Delta^2 - x^2}{\Delta} = 2x + \Delta \tag{5}$$

Damit ist $2x$ der Grenzwert von $q(x,\Delta)$. In der üblichen Notation:

$$\lim_{\Delta\to 0} q(x,\Delta) = 2, x \tag{6}$$

denn $|2x - q(x,\Delta)| = \Delta$ ist kleiner als ϵ für alle Δ die kleiner als ϵ sind.

[55] APV, III 6, 206b 7ff

[56] Auch Ross interpretiert diese Stelle so: „The whole which is finite is nevertheless 'infinite with respect to addition' in the special sense that you cannot construct it by the addition of parts *diminishing in a constant ratio*." Allerdings geht er zu weit wenn er aus der Kenntnis der Beschränktheit einer Reihe schon schliesst: "I. e. Aristotle recognizes the existence of infinite series convergent to a finite sum". W.D. Ross, Aristotle, p. 84

[57] Für eine kurze Geschichte der Epsilontik siehe Sinkevich, Epsilontics

Der Grenzwert einer Folge ist ähnlich definiert: Sei a_1, $a_2, \cdots a_n, \cdots$ eine Folge von Zahlen, wobei $1, 2, \cdots n, \cdots$ natürliche Zahlen sind also keine obere Grenze haben. A heisst der Grenzwert dieser Zahlen, wenn sich zu jeder (noch so kleinen) Zahl ϵ eine natürliche Zahl N finden lässt, dass $|A - a_n|$ kleiner ist als ϵ für alle a_n mit n grösser als N.

Mit Hilfe des Resultats für die endliche Reihe, siehe App. 1, (3) kann man zeigen, dass für $0 < q < 1$ der Grenzwert der geometrischen Reihe $\Sigma(M)$ den Wert $A/(1-q)$ hat:

$$\lim_{M\to\infty} \Sigma(M) = \frac{A}{1-q} \tag{7}$$

Das Finden von δ bzw. N ist oft der einfachste Teil eines Beweises, dass man manchmal bei entsprechender Vorbildung der Leser einen Beweis abkürzt mit : ,,Der Rest ist reine Epsilontik." Für die geometrische Reihe findet man z.B. $N = A{\cdot}q/(\epsilon{\cdot}(1-q))$.

Leider kann die in der Mathematik übliche **Abkürzung**:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j \tag{8}$$

zu dem Missverständnis führen, eine Summe über unendlich viele Summanden sei direkt ein wohldefinierter Ausdruck. Die Nichtbeachtung dieser "mathematische Feinheit" kann, z. B. bei der Vertauschung von Grenzwerten, zu groben Fehlern führen.

Literatur:

Die Zitate sind von mir aus der Originalsprache übersetzt. Bei Übersetzungen aus dem griechischen habe ich mit den neusprachlichen Übersetzungen von A. Laks und G. Most, bei Euklid mit der von R. Haller verglichen.

Aristoteles; PHYSIKVORLESUNGEN, in Aristoteles Graece, Ed. I. Bekker, vol 1, Berlin 1831. zitiert als **APV**.
{https://ia801205.us.archive.org/33/items/aristotle_physics/Bekker_Physics.pdf}

André Laks and Glenn W. Most (eds., trs.); EARLY GREEK PHILOSOPHY / LES DÉBUTS DE LA PHILOSOPHIE, 20. ZENON; Loeb Classical Library nos. 524-532, Cambridge, Mas. 2016/Paris 2016, zitiert als **LMZ**.

BL. van der Waerden; ZENON UND DIE GRUNDLAGENKRISE DER GRIECHISCHEN MATHEMATIK Math. Ann. **117**, 141–161 (1940).
https://doi.org/10.1007/BF01450015

H. Hasse und H. Scholz; DIE GRANDLAGENKRISIS IN DER GRIECHISCHEN MATHEMATIK, Kant-Studien; **33**, 4-34 (1928).
https://search.proquest.com/docview/1294175570?
pq-origsite=gscholar&fromopenview=true&imgSeq=1

G. Calogero; STUDI SULL'ELEATISMO, Rom 1932

P. Ehrlich, AN ESSAY IN HONOR OF ADOLF GR'́UNBAUM'S NINETIETH BIRTHDAY: A REEXAMINATION OF ZENO'S PARADOX OF EXTENSION; Philosophy of Science October 2014, DOI: 10.1086/677978

M. Serres; LES ORIGINES DE LA GÉOMÉTRIE, Flammarion 1993.

Euklid; ELEMENTE, aus Euclidis Opera Omnia, ediderunt I. L. Heiberget H. Menge, Lipsiae 1884.
https://www.opera-platonis.de/euklid/

J.W. Goethe; GOETHES WERKE, Weimarer Ausg. Weimar 1887

B. Russel; THE PRINCIPLES OF MATHEMATICS, Cambridge, England, 1903.

H.G. Dosch und E.A. Schmidt; DAS RAD DES ARISTOTELES, EIN JAHRTAUSENDEALTES PSEUDOPROBLEM, Studia Leibnitiana, **50**, 214-228 (2018).

Aristoteles; MECHANIKA, Aristoteles Graece, Ed. I. Bekker, vol 2, Berlin 1831.

R. Descartes; PRINCIPIA PHILOSOPHIAE, Amsterdam 1644.

I. Newton; MS Add. 4003, normally referred to as De Gravitatione; Cambridge University Library.
https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04003/1

B. Russell; A critical exposition of the philosophy of Leibniz, London 1937 (2. Aufl. eigener Hand).

Isaac Newton; Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1. Aufl. London 1687; 3. Aufl London 1726.
https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/9
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN512261393?tify=
%22panX%22:0.549,%22panY%22:0.715,%22view%22:%22toc%22,%22zoom%22:0.434

G.W. Leibniz; Animadversiones ad Cartesii Principia, Abschrift in folio. C.E.Guhrauer ed., Bonn 1844
https://www.uni-muenster.de/Leibniz/Leibniz_im_Internet/6.html

G.W. Leibniz; Briefwechsel zwischen Leibniz und Hugens van Zulichen, Mathematische Schriften, Bd. 7, Herausg. C I Gerhardt, Berlin 1850.
https://books.google.de/books?id=FSM1AAAAIAAJ&printsec=frontcoverredir_esc=y#v=onepage&q&f=false

G.W. Leibniz; Streitschriften zwischen Leibniz und Clarke, Philosophische Schriften, Bd. 2, Herausg. C I Gerhardt, Berlin 1890.

Ernst Mach; Die Mechanik in ihrer Entwicklung, F. A. Brockhaus, Leipzig 1883.

A. Einstein, E.P. Adams; The Meaning of Relativity: Four Lectures Delivered at Princeton Univ., May, 1921 London 1922, (populäre Darstellung) zahlreiche neue Auflagen und Übersetzungen.

H.G. Dosch; Leibniz, Newton, Decartes und die allgemeine Relativitätstheorie, in Zeit und Logik bei Leibniz, Herausg. C.F. v. Weizsäcker u. E. Rudolph Stuttgart 1989.

W.D. Ross; Aristotle, London oJ (1923).

G.I. Sinkevich; On the history of epsilontics, UDK 51(091), St. Petersburg.
https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1502/1502.06942.pdf