

Vorlesungsskriptum

Theoretische Physik II Analytische Mechanik

Dozent Prof. Dr. Ulrich Schwarz

SS 2011

Stand 19. Juli 2011



Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

Titelblatt	1
Inhaltsverzeichnis	2
Vorwort	4
1 Lagrange-Mechanik	5
1.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten	5
Lagrange-Methode erster Art	7
Lagrange-Methode zweiter Art	7
Klassifizierung der möglichen Zwangsbedingungen	7
Lösungsverfahren für holonome Systeme	11
1.2 D'Alembert'sches Prinzip und Lagrange-Gleichungen	13
1.3 Anwendungen der Lagrange-Gleichungen	19
1.4 Mathematischer Einschub: Variationsrechnung	28
Beispiele für Variationsprobleme	28
Zweidimensionale Taylor-Entwicklung	33
Variation ohne Nebenbedingung	34
Anwendung auf Lagrange-Mechanik: Wirkungsfunktional	36
Beispiele Variation ohne Nebenbedingungen	36
Verallgemeinerungen der Euler-Lagrange-Gleichungen	40
Variation mit Nebenbedingungen	41
1.5 Hamilton'sches Prinzip	48
1.6 Symmetrien und Erhaltungssätze	52
Homogenität der Zeit	53
Homogenität des Raumes	55
Isotropie des Raumes	55
Noether-Theorem	56
1.7 Reibungskräfte	57
1.8 Nicht-holonome Systeme	59
1.9 Starrer Körper	70
2 Hamilton-Mechanik	77
2.1 Hamilton-Funktion	78

Inhaltsverzeichnis

2.2	Bewegungsgleichungen	80
2.3	Phasenraum	81
2.4	Poisson-Klammer	83

Vorwort

Dieses Skript wurde für die Anfängervorlesung *Theoretische Physik II - Analytische Mechanik und Thermodynamik* im Sommersemester 2011 erstellt. Der Heidelberger Studienplan für Bachelor-Studenten der Physik sieht für das erste Semester die Vorlesung *Theoretische Physik I - Mathematische Methoden und Klassische Mechanik* vor. Die *Analytische Mechanik* schliesst daran nahtlos an und wird typischerweise vom gleichen Dozenten gehalten. Da die mathematischen Methoden und die Grundlagen der Mechanik dann eingeführt sind, beginnt sie etwa da, wo früher eine Mechanikvorlesung für Diplomstudenten begann. Vorgesehen sind im Prinzip die Mechanik von Lagrange, Hamilton und Hamilton-Jacobi. Aus Zeitgründen wurde jedoch auf den dritten Teil verzichtet, schliesslich gilt es im zweiten Teil des Semesters noch, der Thermodynamik zu ihrem Recht zu verhelfen.

Für diese Vorlesung können alle bekannten Lehrbücher zur Mechanik herangezogen werden, etwa diejenigen von Wolfgang Nolting, Torsten Fließbach, Walter Greiner, Florian Scheck oder Friedhelm Kuypers. Auch allgemeine Einführungen in die theoretische Physik (wie der Honerkamp-Römer) oder die Klassiker der Mechanik (Goldstein, Landau-Lifshitz, Feynman) sind zu empfehlen. Der aufmerksame Leser wird sicherlich merken, dass dieses Skript viel von den Büchern von Nolting und Fließbach profitiert hat. Wie im letzten Semester war die Absicht wieder, den Studierenden durch die Erstellung des Skripts bei der Nachbearbeitung der Vorlesung und der Vorbereitung der Klausur zu helfen.

Ein herzliches Dankeschön geht an Florian Eberhart und Thorben Jansen, die dieses Semester als studentische Hilfskräfte bei der Erstellung des Skripts mitgearbeitet haben. Vielen Dank auch an die Studiengebührenkommission für die finanzielle Unterstützung.

Heidelberg, im Juni 2011

Ulrich Schwarz

1 Lagrange-Mechanik

Bisher haben wir uns mit der *Newton'schen Mechanik* befaßt, die auch als *Klassische Mechanik* bekannt ist. Tatsächlich gibt es noch drei weitere Formulierungen der Mechanik, die nach Lagrange, Hamilton und Hamilton-Jacobi benannt sind, und als *Analytische Mechanik* zusammengefasst werden. Die *Lagrange'sche Mechanik* befasst sich mit dem Problem der Zwangsbedingungen und zeigt, dass die Bewegungsgleichungen aus Variationsprinzipien abgeleitet werden können. Damit wird ein höheres Abstraktionsniveau als in der Klassischen Mechanik erreicht, das auch den Ausgangspunkt für andere fortgeschrittene Gebiete der Theoretischen Physik darstellt. Tatsächlich hat sich aus den beiden anderen Gebieten der Analytischen Mechanik die Quantenmechanik entwickelt: die *Hamilton'sche Mechanik* ist der Ausgangspunkt für die Matrizenmechanik nach Heisenberg und die *Hamilton-Jacobi-Mechanik* ist der Ausgangspunkt für die Wellenmechanik nach Schrödinger. Wir beginnen jetzt mit der Lagrange'schen Mechanik, die in der Analytischen Mechanik aufgrund ihrer Praxisrelevanz heraussticht.

1.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Das zentrale Ergebnis der Newton'schen Mechanik ist das zweite Newton'sche Gesetz, das für Mehrteilchensysteme folgende Bewegungsgleichung ergibt:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (1.1)$$

wobei der Index $1 \leq i \leq N$ die N Teilchen durchnummeriert und auf der rechten Seite externe und interne Kräfte unterschieden werden. Mathematisch handelt es sich dabei um ein System von $3N$ gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODEs), so dass $6N$ Anfangsbedingungen zur Lösung nötig sind. Ein besonderer Aspekt der Newton'schen Mechanik besteht darin, dass sie die explizite Kenntnis aller Kräfte voraussetzt.

In vielen Fällen sind die wirkenden Kräfte nicht alle bekannt, dafür aber die Beschränkung in den Bewegungsmöglichkeiten, die diese verursachen. Man spricht

1 Lagrange-Mechanik

dann von *Zwangskräften* und *Zwangsbedingungen*. Diese Situation ist der Ausgangspunkt für die Lagrange'sche Mechanik.

Beispiel: Das **Fadenpendel** besitzt nur einen Freiheitsgrad, den Winkel φ , da die anderen Freiheitsgrade durch Zwangskräfte ausgeschaltet werden. Die Zwangskraft wirkt im Faden (Fadenspannung) und hält das Teilchen auf einer Kreisbahn. Es gilt die Zwangsbedingung $r^2 = l^2$.

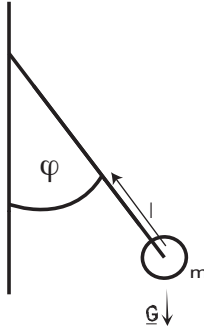


Abbildung 1.1: Mathematisches Pendel: die Fadenspannung ist eine Zwangskraft, die die Zwangsbedingung einer Kreisbahn bewirkt.

Beispiel: Auch die **Kolbenmaschine** besitzt effektiv nur einen Freiheitsgrad, den Winkel φ , obwohl sie eigentlich aus sehr vielen Teilchen besteht.

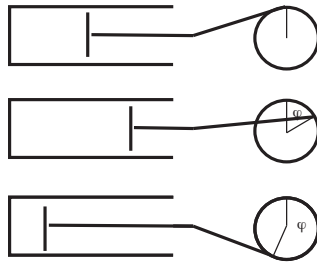


Abbildung 1.2: Kolbenmaschine: obwohl die Maschine sehr kompliziert ist, hat sie effektiv nur einen Freiheitsgrad.

Die Lagrange'sche Mechanik stellt mehrere Strategien bereit, mit Zwangskräften umzugehen. Am Beispiel des Fadenpendels:

Lagrange-Methode erster Art

Die Bewegungsgleichung wird explizit mit Zwangskräften gelöst:

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \lambda(t) \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^2 - l^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \text{ Gleichungen} \\ \text{für 4 Unbekannte} \end{array} \quad (1.2)$$

wobei wir ausgenützt haben, dass die Zwangskraft in Fadenrichtung wirkt. $\lambda(t)$ wird *Lagrange-Parameter* genannt. In der Lagrange-Methode erster Art wird dieses Verfahren, Lagrange-Parameter einzuführen, verallgemeinert.

Lagrange-Methode zweiter Art

Die Bewegungsgleichungen werden durch Multiplikation mit einem Tangentialvektor auf die Fläche projiziert, auf der sich das System aufgrund der Zwangskräfte bewegt. Dabei fallen die Zwangskräfte heraus und es bleiben nur die relevanten Koordinaten übrig, in unserem Beispiel also nur die Winkelkoordinate. Für das Fadenpendel lautet die Bewegungsgleichung auf \mathbf{e}_φ projiziert:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (1.3)$$

Die Zwangskraft kann wenn gewünscht nachträglich berechnet werden:

$$\mathbf{Z} = m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{G} \quad (1.4)$$

Die Lagrange-Methode zweiter Art stellt eine Vorschrift auf, um solche Bewegungsgleichungen elegant und einfach herzuleiten.

Klassifizierung der möglichen Zwangsbedingungen

Wie so oft in der Theoretischen Physik ist eine systematische Klassifizierung aller möglichen Fälle die Voraussetzung für eine erfolgreiche Entwicklung für Lösungsstrategien.

A holonom (global)

Es gibt p Einschränkungen in der Form:

$$f_\nu(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \quad 1 \leq \nu \leq p \quad (1.5)$$

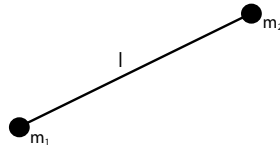
A1 holonom-skleronom (starr)

Es gibt keine explizite Zeitabhängigkeit, $\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0$

Beispiele

1 Lagrange-Mechanik

- 1) Fadenpendel
- 2) Kolbenmaschine
- 3) Hantel: $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - l^2 = 0$



- 4) Starrer Körper: $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$
- 5) Teilchen auf Kugeloberfläche: $\mathbf{r}^2 - R^2 = 0$

A2 holonom-rheonom (fließend)

Mit expliziter Zeitabhängigkeit $\frac{\partial f_V}{\partial t} \neq 0$

- 1) Teilchen im Aufzug mit vorgegebenen $z(t)$:

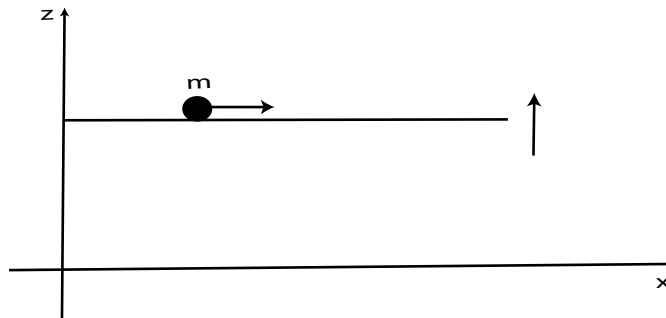


Abbildung 1.3: Ein Teilchen im Aufzug hat eine vorgegebene Koordinate $z(t)$.

$$\underbrace{z(t) - [z_0 + v_0(t - t_0)]}_{f(z,t)} = 0 \quad (1.6)$$

- 2) Teilchen auf schiefer Ebene mit veränderlicher Neigung

1 Lagrange-Mechanik

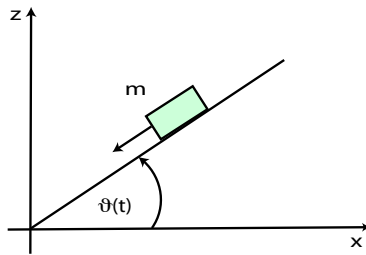


Abbildung 1.4: Ähnlich wie Teilchen im Aufzug, aber dieses Mal ändert sich eine Winkelkoordinate.

$$\frac{z(t)}{x(t)} = \tan \varphi(t) \Rightarrow \underbrace{z(t) - x(t) \tan(\varphi)}_{f(z,x,t)} = 0 \quad (1.7)$$

- 3) Schaukeln: entspricht einem Pendel, bei dem durch geschickte Körperverlagerung die Fadenlänge dynamisch geändert wird und so das System aufgeschaukelt wird.



Abbildung 1.5: Geschicktes Schaukeln erhöht die Amplitude.

- 4) Weihrauchfass von Santiago de Compostela (am Ende des Jakobswegs)

1 Lagrange-Mechanik

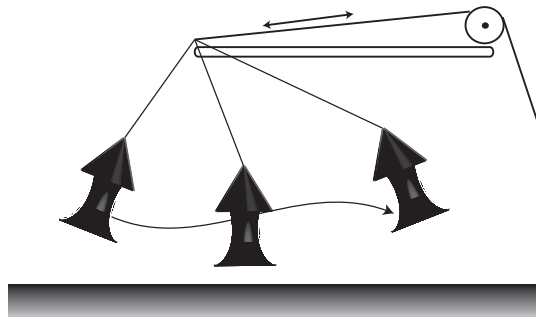


Abbildung 1.6: Durch geschicktes Ziehen an der Aufhängung wird das Weihrauchfass ins Schwingen gebracht.

5) Jojo

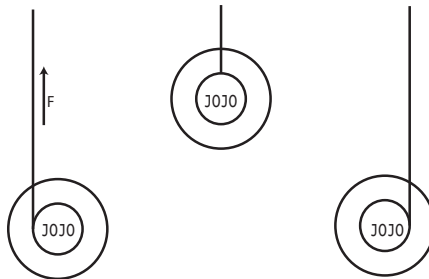


Abbildung 1.7: Auch hier führt geschicktes Ziehen zum Aufschaukeln.

B nicht-holonom

Es existieren keine Funktionen der Art $f_\nu(r_1, \dots, r_N, t) = 0$. Typischerweise sind die Zwangsbedingungen Ungleichungen oder differentieller Natur.

Beispiele

- 1) Abakus (Perlen auf Rechenbrett): es gibt keine Gleichungen, nur Ungleichungen der Art $a \leq x_i \leq b$.
- 2) Teilchen in einer Kugel: auch hier gibt es nur eine Ungleichung, $\mathbf{r}^2 \leq R^2$
- 3) Rollen eines Rades auf einer Unterlage (mit Reibung, ohne Gleiten): dieses Problem führt nur auf eine differentielle, aber nicht auf eine globale Zwangsbedingung

1 Lagrange-Mechanik

Die Konfiguration des Rades wird durch die Koordinaten $(x, y, \vartheta, \varphi)$ vollständig beschrieben.

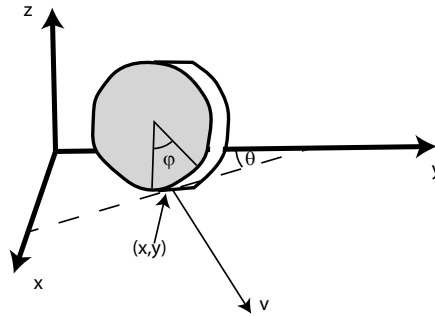


Abbildung 1.8: Koordinaten für das rollende Rad

Die Rollbedingung führt zu folgenden Einschränkungen:

$$v = R \cdot \dot{\varphi} \tag{1.8}$$

$$\dot{x} = v_x = v \cdot \cos \vartheta \tag{1.9}$$

$$\dot{y} = v_y = v \cdot \sin \vartheta \tag{1.10}$$

Das führt zu folgenden differentiellen Zwangsbedingungen:

$$\boxed{dx - R \cos \vartheta d\varphi = 0, \quad dy - R \sin \vartheta d\varphi = 0}$$

Diese differentielle Form entspricht nicht einer globalen Funktion $f(x, y, \vartheta, \varphi)$. Da $\vartheta(t)$ nicht bekannt ist, können wir die Bedingung nicht integrieren. Physikalisch entspricht dies der Tatsache, dass alle Werte von $f(x, y, \vartheta, \varphi)$ möglich sind, wenn man nur geschickt hin- und herrollt.

Um dem holonomen Fall zu entsprechen, müssen die differentielle Zwangsbedingungen ein totales Differential bilden. Die Bedingung $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$ muß gelten, damit sich holonome Zwangsbedingungen $f_\nu(r_1, \dots, r_N, t) - c = 0$ ergeben. Für holonome Zwangsbedingungen gibt es allgemeine Lösungsverfahren, im Gegensatz zu nicht-holonomen Zwangsbedingungen.

Lösungsverfahren für holonome Systeme

Das System hat $S = 3N - p$ Freiheitsgrade. Wir führen S *generalisierte Koordinaten* q_i ($1 \leq i \leq S$) ein. Die generalisierten Koordinaten werden je nach physikalischer Fragestellung definiert und werden so gewählt dass:

1 Lagrange-Mechanik

- 1) eine eindeutige Transformation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t)$ existiert und
- 2) die q_i unabhängig voneinander sind, d.h. es gibt keine Funktionen der Form $F(q_1, \dots, q_s, t) = 0$

Bemerkungen

- 1) Die $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)$ spannen den *Konfigurationsraum* auf. \mathbf{q} ist der *Konfigurationsvektor*, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ sind die *generalisierte Geschwindigkeiten*.
- 2) q_i und \dot{q}_i haben nicht notwendigerweise die Dimensionen m und $\frac{m}{s}$. Zum Beispiel kann es sich dabei auch um Winkel handeln.
- 3) Wir benötigen $2S$ Anfangsbedingungen.
- 4) Die q_i entsprechen den angepassten Koordinaten y_i aus der Klassischen Mechanik.

Beispiel :

1 Teilchen auf Kugeloberfläche

$$\mathbf{r}^2 - R^2 = 0 \Rightarrow p = 1, S = 3 - 1 = 2$$

Hier bieten sich Kugelkoordinaten an, $q_1 = \varphi, q_2 = \vartheta$.

2 Ebenes Doppelpendel

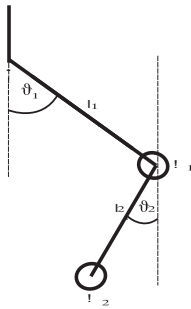


Abbildung 1.9: Das ebene Doppelpendel hat zwei Freiheitsgrade.

$$S = 2 \quad q_1 = \vartheta_1 \quad q_2 = \vartheta_2$$

1 Lagrange-Mechanik

3 Teilchen im Zentralfeld

Bei diesem Beispiel gibt es keine äußeren Kräfte, außerdem gilt die Drehimpulserhaltung

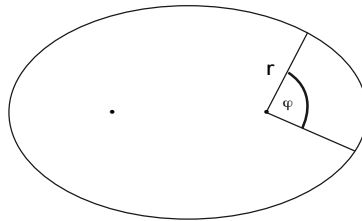


Abbildung 1.10: Generalisierte Koordinaten für Keplerproblem

$$\Rightarrow S = 2 \quad q_1 = r \quad q_2 = \varphi$$

1.2 D'Alembert'sches Prinzip und Lagrange-Gleichungen

Ziel der Lagrange-Methode der zweiten Art sind Bewegungsgleichungen für generalisierte Koordinaten. Dabei stellt sich heraus, dass dies mit einem skalaren Prinzip erreicht werden kann, das somit das vektorielle Prinzip der Newton'schen Bewegungsgleichungen ersetzt. Diese Vorgehensweise ist eleganter und bietet sich als Ausgangspunkt für höhere Begriffsbildungen an.

Wir führen eine *virtuelle Verrückung* $\delta \mathbf{r}_i$ ein. Diese erfolgt instantan ($\delta t = 0$) und genügt den **momentanen** Zwangsbedingungen.

Beispiel Teilchen im Aufzug

1 Lagrange-Mechanik

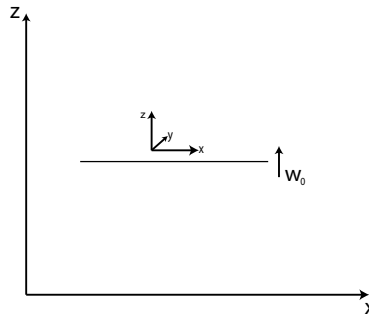


Abbildung 1.11: Erklärung des Konzepts der virtuellen Verrückung.

-generalisierte Koordinate $q = x$

-physikalische Verrückung $d\mathbf{r} = (dx, dz) = (dq, v_0 dt)$

-virtuelle Verrückung $\delta\mathbf{r} = (\delta x, 0) = (\delta q, 0)$

Offensichtlich gilt hier $\delta\mathbf{r} \neq d\mathbf{r}$ (gilt allgemein für rheonome Systeme).

Unser Ausgangspunkt sind die Newton'sche Bewegungsgleichungen:

$$\underbrace{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}_{\text{Trägheitskräfte}} = \underbrace{\mathbf{K}_i}_{\text{direkte Kräfte}} + \underbrace{\mathbf{Z}_i}_{\text{Zwangskräfte}} \quad (1.11)$$

Wir projizieren auf die erlaubte Bahn durch skalare Vektormultiplikation mit der virtuellen Verrückung:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{=\delta W, \text{virtuelle Arbeit}} = 0 \quad (1.12)$$

Die Summe ist notwendig, da virtuelle Verrückungen i.d.R. nicht auf einzelne Teilchenkoordinaten eingeschränkt sind.

In der Regel gilt das **Prinzip der virtuellen Arbeit**: $\delta W = 0$, d.h. die Zwangskräfte leisten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit (Ausnahme Reibungskräfte).

Beispiele

1 Fadenpendel

1 Lagrange-Mechanik

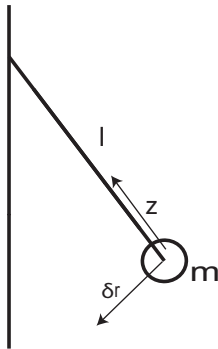


Abbildung 1.12: Fadenpendel

$$\mathbf{Z} \perp \delta \mathbf{r} \Rightarrow \delta W = -\mathbf{Z} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

2 Hantel

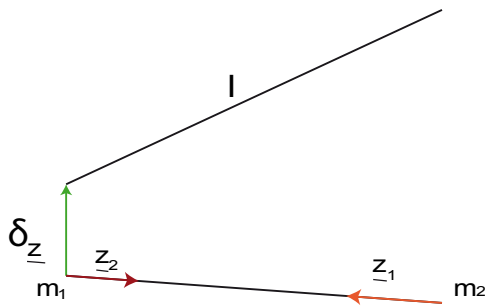


Abbildung 1.13: Hantel

$$\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_2$$

Virtuelle Verrückung: kann in Translation und Rotation zerlegt werden

$$\delta \mathbf{r}_1 = \delta \mathbf{s}$$

$$\delta \mathbf{r}_2 = \delta \mathbf{s} + \delta \mathbf{x}_R$$

$$\begin{aligned} \delta W &= -\mathbf{Z}_1 \delta \mathbf{s} - \underbrace{\mathbf{Z}_2}_{-\mathbf{Z}_1} (\delta \mathbf{s} + \delta \mathbf{x}_R) \\ &= -\mathbf{Z}_1 \underbrace{(\delta \mathbf{s} - \delta \mathbf{s})}_{=0} - \mathbf{Z}_2 \underbrace{\delta \mathbf{x}_R}_{\perp \mathbf{Z}_2=0} \end{aligned} \tag{1.13}$$

1 Lagrange-Mechanik

Gesamtbetrachtung benötigt beide Teilchen

3 Atwood'sche Fallmaschine

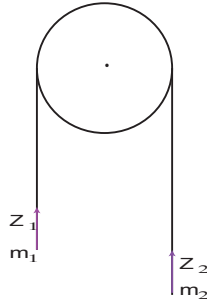


Abbildung 1.14: Atwood'sche Fallmaschine

$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2$ (ähnlich wie bei der Hantel, aber andere Richtung).

Die virtuelle Verrückung $(\delta r_1, \delta r_2) = (\delta \mathbf{z}, -\delta \mathbf{z})$ koppelt beide Teilchen!

$$\delta W = -\mathbf{Z}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 - \mathbf{Z}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = -\mathbf{Z}_1 \underbrace{(\delta \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_2)}_{\delta \mathbf{z} - \delta \mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit vereinfacht sich unsere Umformulierung der Newton'schen Bewegungsgleichungen, die Zwangskräfte fallen explizit raus.

$$\boxed{\sum_{i=1}^N \left(\overset{\textcircled{1}}{m \ddot{\mathbf{r}}_i} - \overset{\textcircled{2}}{\mathbf{K}_i} \right) \delta \mathbf{r}_i + \underbrace{\delta W}_{=0} = 0} \quad (1.14)$$

Diese Gleichung ist als *D'Alembert'sches Prinzip* bekannt. Die Zwangskräfte können eliminiert werden, die Zwangsbedingungen sind aber durch die virtuelle Verrückung noch repräsentiert. Nachdem die Zwangskräfte rausgefallen sind, haben wir noch Terme für Trägheitskräfte und direkte Kräfte. Im folgenden werden wir jeden Term für sich geschickt umformulieren.

Um verwertbare Bewegungsgleichungen zu erhalten, wechseln wir jetzt zu generalisierten Koordinaten. Wir verlangen also, dass es Transformationsformeln gibt der Art

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad (1.15)$$

Die partiellen Ableitungen müssen mindestens bis zur zweiten Ordnung stetig sein.

1 Lagrange-Mechanik

Wir bilden das totale Differential der Transformationsformeln:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.16)$$

Daraus ergeben sich drei wichtige Formeln:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \text{virtuelle Verrückung} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (1.19)$$

Umschreiben von 2:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^S \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{=: Q_j} \delta q_j \quad (1.20)$$

Die Q_j werden *generalisierte Kraftkomponenten* genannt.

Konservative Systeme:

$$\mathbf{K}_i = -\nabla V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

$$\Rightarrow Q_j = -\sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_j} \quad (1.21)$$

Umschreiben von 1:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i}_{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}} \right) - \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i}_{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}} \right\} \delta q_j \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right\} \delta q_j \\
 &= \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

wobei die kinetische Energie $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$

Kombination von 1 und 2

$$\boxed{\sum_{j=1}^S \left\{ \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0} \tag{1.23}$$

Ist die allgemeine Formulierung des D'Alembert'schen Prinzips.

Physikalisch besonders relevant ist der Fall von konservativen Systemen mit holonomen Zwangsbedingungen.

Holonom keine Einschränkung der Art $F(\mathbf{q}, t) = 0$

$\Rightarrow \delta q_j$ sind unabhängig, Summe über j entfällt

Konservativ:

$$Q_j = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_j}, \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V)}_{=:L} - \frac{\partial}{\partial q_j} \underbrace{(T - V)}_{=:L} = 0 \tag{1.24}$$

Hier haben wir jetzt das zentrale Konzept der Lagrange'schen Mechanik eingeführt, die **Lagrange-Funktion**:

$$\boxed{L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)}$$

1 Lagrange-Mechanik

Damit folgt das zentrale Ergebnis der Lagrange'schen Mechanik, die **Lagrange Gleichungen der zweiter Art**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad 1 \leq j \leq S$$

Diese Differentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten ersetzen in der Lagrange'schen Mechanik die Newton'schen Bewegungsgleichungen der Klassischen Mechanik.

Ohne Zwangsbedingungen vereinfachen sich die Lagrange-Gleichungen zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen: $S = 3N$

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, \dots, z_N, t) \quad (1.25)$$

Wir bilden die Lagrange-Gleichung für die erste Koordinate des ersten Teilchens, x_1 (alle anderen Koordinaten sind gleichwertig):

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = F_{x_1} \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 \ddot{x}_1 = F_{x_1}}$$

Das ist genau das zweite Gesetz von Newton.

1.3 Anwendungen der Lagrange-Gleichungen

Für konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen bietet die Lagrange-Mechanik ein Rezept:

- 1) Zwangsbedingungen formulieren ($f_\nu = 0$); S Freiheitsgrade abzählen
- 2) S generalisierte Koordinaten \mathbf{q} entsprechend wählen; Transformationsformeln formulieren: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$
- 3) Lagrange-Funktion $L = T - V = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ berechnen
- 4) S Lagrange-Gleichungen berechnen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow S \text{ gekoppelte ODEs}$$

- 5) Differentialgleichungen lösen, $2S$ Anfangsbedingungen; wenn möglich Erhaltungsgrößen ausnützen

6) Auf ursprüngliche Koordinaten zurücktransformieren; Diskussion der Lösung

Beispiele

① Atwood'sche Fallmaschine

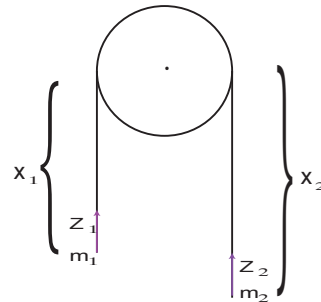


Abbildung 1.15: Atwood'sche Fallmaschine

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$$

$$(x_1 + x_2) - l = 0 \Rightarrow S = 6 - 5 = 1 \Rightarrow q = x_1$$

Transformationsformeln: $x_1 = q$
 $x_2 = l - q$

kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 \quad (1.27)$$

potentielle Energie

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2 = -(m_1 - m_2)gq - m_2gl \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + (m_1 - m_2)gq + m_2gl \quad (1.29)$$

Bewegungs-(Lagrange-)Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 + m_2)\ddot{q} - (m_1 - m_2)g = 0 \quad (1.30)$$

1 Lagrange-Mechanik

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

Die Situation ist also ähnlich wie beim freier Fall, die Beschleunigung ist nämlich konstant. Allerdings ist die Erdbeschleunigung g hier durch eine dimensionslose Kombination der Massen reduziert, d.h. die Fallmaschine kann benutzt werden, um Fallprozesse genauer zu vermessen. Für $m_1 = m_2$ folgt wie erwartet $\ddot{q} = 0$. Die Zwangskraft \mathbf{Z} kann nachträglich berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g + Z \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g + Z \end{aligned} \right\} \text{Newton}$$

Subtrahieren:

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 &= (m_1 + m_2) \ddot{q} \\ &= (m_1 - m_2) g \end{aligned} \quad (1.31)$$

Addieren:

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 &= (m_1 - m_2) \ddot{q} \\ &= \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g = (m_1 + m_2) g + 2Z \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{2} \frac{(m_1 - m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)} g = \boxed{-2 \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g = Z} \quad (1.33)$$

Das negative Vorzeichen spiegelt wieder, dass die Zwangskraft der Gewichtskraft entgegen wirkt. Die Massen gehen hier als reduzierte Masse μ ein. Die Zwangskraft ist also konstant, sie hängt nicht vom Bewegungszustand ab.

② Perle auf rotierendem Draht

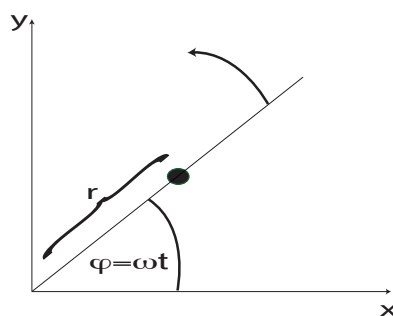


Abbildung 1.16: Eine Perle gleitet auf einem Draht, der in der x-y-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert

1 Lagrange-Mechanik

zwei holonome Zwangsbedingungen: skleronom $z = 0$, rheonom $\frac{y(t)}{x(t)} = \tan \omega t$.
 Deshalb gilt $S = 3 - 2 = 1 \Rightarrow q = r$.

Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= q \cos \omega t \\ y &= q \sin \omega t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}[(\dot{q} \cos \omega t - q\omega \sin \omega t)^2 + (\dot{q} \sin \omega t + q\omega \cos \omega t)^2] \\ &= \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + q^2\omega^2) \quad V = 0 \quad \Rightarrow L = T \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \underbrace{m\ddot{q}}_{\text{Trägheitskraft}} - \underbrace{m\omega^2 q}_{\text{Zentrifugalkraft}} \quad (1.35)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q} = \omega^2 q} \quad \text{wie abgeleitende Kette}$$

Allgemeine Lösung: $q = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$$q(0) = r_0, \quad \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}r_0 \quad (1.36)$$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = r_0 \cosh \omega t} \quad (1.37)$$

Virtuelle Arbeit $\delta W = 0$

③ Schwingende Hantel

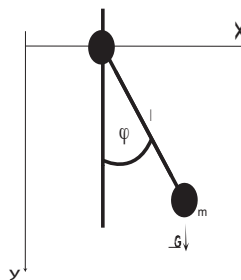


Abbildung 1.17: Der Aufhängepunkt des Pendels kann sich reibungsfrei auf der Horizontalen bewegen.

1 Lagrange-Mechanik

m_1 gleitet reibungsfrei und m_2 schwingt.

4 holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$z_1 = z_2 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0 \quad \Rightarrow S = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Transformationsformeln:} \quad x_1 &= q_1 & y_1 &= z_1 = z_2 = 0 \\ x_2 &= q_1 + l \sin q_2 & y_2 &= l \cos q_2 \end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[(\dot{q}_1 + l\dot{q}_2 \cos q_2)^2 + (-l\dot{q}_2 \sin q_2)^2] \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{q}_1^2 + l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2] \end{aligned} \quad (1.38)$$

potentielle Energie:

$$V = -m_2gl \cos q_2 \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) + m_2gl \cos q_2 \quad (1.40)$$

L hängt nicht von q_1 ab! Solche Koordinaten heißen *zyklisch*. Jede zyklische Variable führt zu einem Erhaltungssatz und erleichtert die Lösung der Bewegungsgleichungen. Hier entspricht q_1 der Verschiebung in x-Richtung, dies ist eine *weiche Mode* des Systems.

Lagrange-Gleichung $0 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$

$$\Rightarrow \text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 + m_2l \cos(q_2)\dot{q}_2 = c \quad (1.41)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_1 = c - \frac{m_2l}{m_1 + m_2} \cos(q_2)\dot{q}_2$$

$$\Rightarrow q_1 = ct - \frac{m_2l}{m_1 + m_2} \sin q_2 + a \quad (1.42)$$

Der Einfachheit halber wählen wir Anfangsbedingungen, die $a = c = 0$ entsprechen:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0 & q_2(0) &= 0 \\ \dot{q}_1(0) &= -\frac{m_2l}{m_1 + m_2}\omega_0 & \dot{q}_2(0) &= \omega_0 \end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_1 = q_1 &= -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi \\ x_2 = q_1 + l \sin q_2 &= \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi \\ y_2 = l \cos q_2 &= l \cos \varphi\end{aligned}$$

Die Ausnützung der Erhaltungsgröße führt also auf eine Parametrisierung der Bahnkurven durch φ :

Masse 1 (x_1): Der Aufhängepunkt oszilliert gegenläufig zum Pendel. Wenn m_1 von aussen getrieben wird, dann dämpft das daran hängende Pendel die Bewegung dieser Masse. Deshalb ist dieses System die Grundlage einer *Schwingungstilgung*, wie sie z.B. im 508 m hohen Hochhaus Taipei 101 verwendet wird, um durch Wind oder Erdbeben angeregte Schwingungen auszdämpfen. Dabei handelt es sich um ein Pendel von 42 m Länge mit einer 660 Tonnen schweren (vergoldeten) Stahlkugel.

Masse 2 (x_2, y_2): Die schwingende Masse beschreibt eine Ellipsenbahn.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Im Limes $m_1 \rightarrow \infty : x_1 = 0$,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ Kreisbahn} \quad \Rightarrow \text{mathematisches Pendel}$$

Eine vollständige Lösung muß eine Trajektorie $\mathbf{q}(t)$ ergeben. Dafür müssen wir zu den Lagrange-Gleichungen zurückgehen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2(l^2 \ddot{q}_2 + l \cos q_2 \dot{q}_1) \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + g) \sin q_2 \tag{1.44}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 l^2 \ddot{q}_2 + m_2 l \cos q_2 \dot{q}_1 + m_2 g l \sin q_2$$

Näherung kleiner Winkel: $l\ddot{q}_2 + \dot{q}_1 + gq_2 \approx 0$

Außerdem:

$$\begin{aligned}x_1 \approx -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \varphi &\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2 \\ \Rightarrow \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2 + gq_2 \approx 0 &\Rightarrow \boxed{\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0}\end{aligned} \tag{1.45}$$

1 Lagrange-Mechanik

In der Näherung kleiner Winkel erhalten wir also einen harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1+m_2}{m_1}} \rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}$ für $m_1 \rightarrow \infty$ (mathematisches Pendel).

④ **Zykloidenpendel** (Huygens 1673)

Im Gegensatz zum Fadenpendel bewegt sich der Massenpunkt nicht auf einer Kreisbahn, sondern auf einer Zykloide. Wie beim Fadenpendel gibt es nur einen Freiheitsgrad, $S = 1$, $q = \varphi$. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Gewichtskraft zu einer Schwingung um $\varphi = 0$ führt.

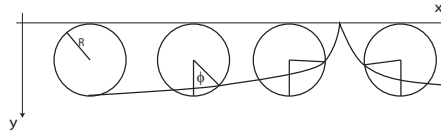


Abbildung 1.18: Ein Rad rollt an der Decke ab. Die Gewichtskraft sorgt dafür, dass es eine Schwingung gibt um den Nullwert des gewählten Winkels.

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\varphi + R \sin \varphi \\ R + R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}(1 + \cos \varphi)$$

$$\dot{y} = -R\dot{\varphi} \sin \varphi$$

kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}R^2(2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

potentielle Energie

$$V = -mgy = -mgR(1 + \cos \varphi)$$

1 Lagrange-Mechanik

$$\Rightarrow L = T - V = mR(1 + \cos q)(R\dot{q}^2 + g) \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2mR^2(1 + \cos q)\dot{q} \quad (1.47)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2mR^2 \left[\underbrace{(1 + \cos q)}_{2 \cos^2 \frac{q}{2}} \ddot{q} - \underbrace{\sin q}_{2 \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2}} \dot{q}^2 \right] \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -mR \underbrace{\sin q}_{2 \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2}} (R\dot{q}^2 + g) \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \\ &= 2mR^2 \left[2\ddot{q} \cos^2 \frac{q}{2} - 2\dot{q}^2 \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} \right] + 2mR \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} (R\dot{q}^2 + g) \\ \Rightarrow 0 &= \underbrace{2\ddot{q} \cos \frac{q}{2} - \dot{q}^2 \sin \frac{q}{2}}_{\quad} + \frac{g}{R} \sin \frac{q}{2} = 0 \\ &= 4 \frac{d^2}{dt^2} \left(\sin \frac{q}{2} \right) + \frac{g}{R} \sin \frac{q}{2} \\ \sin \frac{q}{2} &:= f(t) \Rightarrow \boxed{f''(t) + \frac{g}{4R} \cdot f(t) = 0} \end{aligned}$$

Harmonischer Oszillator mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$. Wie beim Fadenpendel ist also die Frequenz unabhängig von der Masse und der Amplitude. Im Gegensatz zum Fadenpendel ist die lineare Lösung exakt für alle Winkel, d.h. sie gilt nicht nur in der Näherung kleiner Winkel. In der Praxis ist das Zykloidenpendel allerdings schwer zu realisieren, weil Reibung typischerweise zu starker Dämpfung führt.

Die vollständige Lösung lautet:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}] \quad (1.50)$$

wobei A,B aus den Anfangsbedingungen gewonnen wird.

⑤ Bewegungsgleichungen in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten ein freies Teilchen ($V = 0$) ohne Zwangsbedingungen ($S = 3$). Als generalisierte Koordinaten wählen wir einen Satz von krummlinigen Koordinaten (z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten). Es gibt also zwar keine Zwangsbedingungen, aber Transformationsformeln:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad 1 \leq i \leq 3$$

1 Lagrange-Mechanik

Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{q} = (\rho, \varphi, z)$$

Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \mathbf{q} = (r, \vartheta, \varphi)$$

$$\begin{aligned} dx_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \\ \Rightarrow ds^2 &= \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_j dq_k \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}}_{g_{jk}(\mathbf{q})} dq_j dq_k \end{aligned}$$

Das differentielle Wegelement ds bestimmt die Länge zwischen zwei Punkten im Raum, also die *Metrik* des Raums. $g_{jk}(\mathbf{q})$ ist der *metrische Tensor* und beschreibt die Massverhältnisse in dem gewählten Koordinatensystem. Achtung: der metrische Tensor ist **nicht** die Jacobi-Matrix, vergleiche Kapitel 1.6 im Skript PTP1.

Wir beschränken uns auf orthogonale Koordinaten, dann ist der metrische Tensor diagonal:

$$g_{jk}(\mathbf{q}) = \delta_{jk} h_j(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zylinderkoordinaten: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Kugelkoordinaten: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Lagrange- Funktion:

$$L = T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.51)$$

1 Lagrange-Mechanik

$$= \begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) & \text{Zylinderkoordinaten} \\ \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) & \text{Kugelkoordinaten} \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen folgen dann einfach aus den Lagrange-Gleichungen, also aus $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ ($1 \leq j \leq 3$).

Beispiel: Beschleunigung in Radialrichtung in Kugelkoordinaten, keine äußeren Kräfte, nur Trägheit, also $a_r = 0$ (Masse kürzt sich raus)

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 = 0} \quad (1.52)$$

Dieses Ergebnis wurde in PTP1 im Kapitel 1.7 explizit mit Vektorrechnung hergeleitet. Hier folgt es relativ einfach aus skalaren Rechnungen.

1.4 Mathematischer Einschub: Variationsrechnung

Unser zentrales Ergebnis bisher waren die Lagrange-Gleichungen, die einen klaren physikalischen Ursprung haben, nämlich das geschickte Umschreiben der Newton'schen Bewegungsgleichungen. Wenn man diese Gleichungen allerdings einem Mathematiker / einer Mathematikerin zeigt, wird er / sie diese ohne physikalische Vorkenntnis trotzdem kennen, und zwar als Grundgleichung der Variationsrechnung.

Erinnerung: In der reellen Analysis werden die Extrema einer Funktion durch eine verschwindende Ableitung, $f'(x) = 0$, charakterisiert.

Problemstellung: Bei uns geht es nicht um optimale Punkte, sondern um optimale Funktionen, also um die Frage, welche Funktion (Trajektorie) die Bewegungsgleichung löst. Wenn es dafür ein Extremumsprinzip gibt, was genau wird dann optimiert ?

Antwort: Optimale Funktionen machen ein *Funktional* stationär. Funktionale sind Funktionen von Funktionen und Thema der *Funktionalanalysis*.

Funktional = Abbildung $F : y(x) \mapsto F[y] \in \mathbb{R}$

Achtung: im Gegensatz zu den runden Klammern für Funktionen werden für Funktionale eckige Klammern verwendet.

Beispiele für Variationsprobleme

- 1) Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene? Minimiert wird die Bogenlänge:

$$L[y] = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

1 Lagrange-Mechanik

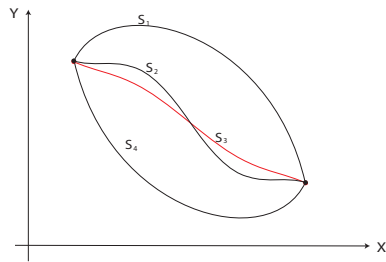


Abbildung 1.19: Verschiedene Wege verbinden die zwei Punkte. Welcher davon ist die kürzeste Verbindung ?

Dieses Beispiel ist typisch für die Physik: das Funktional ist typischerweise ein Integral über eine Funktion F von $y(x)$. Das Integral wandelt die Funktion F in einen skalaren Wert um, der dann nach der Funktion $y(x)$ minimiert werden kann. Die Randwerte werden dabei typischerweise festgehalten.

Verwandte Optimierungsprobleme:

- 1) Traveling Salesman Problem



Abbildung 1.20: Optimaler Reiseweg eines Handelsreisenden durch die 15 größten Städte Deutschlands. Die angegebene Route ist die kürzeste von 43.589.145.600 möglichen. Quelle: Wikipedia.

Liste von N Punkten (z.B. Koordinaten von N Städten) $\Rightarrow N!$ möglicher Routen, um eine nach der anderen zu besuchen. Welche ist die kürzeste Route ? Die besten Algorithmen sind $O(2^N)$ und können für 10.000 Punkte durchgeführt werden.

1 Lagrange-Mechanik

Anwendungen: Navigation, Logistik, Chipdesign, DNA-Sequenzierung, etc.

2) Steiner-Problem

Was ist das kürzeste Netz, das eine Liste von N vorgegebenen Punkten verknüpft? Dabei dürfen neue Knoten eingefügt werden.

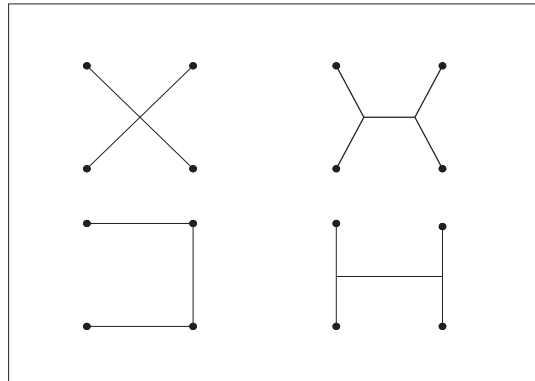


Abbildung 1.21: Die beste Lösung ist die oben rechts, der Steiner-Baum. Tatsächlich gibt es zwei äquivalente beste Lösungen, hier wird nur eine gezeigt. Dies ist ein Beispiel von spontaner Symmetriebrechung.

Anwendungen: Bau von Elektrizitäts- oder Schienennetzen.

2) Minimalflächen: Welche Fläche hat für einen gegebenen Rahmen den kleinsten Flächeninhalt?

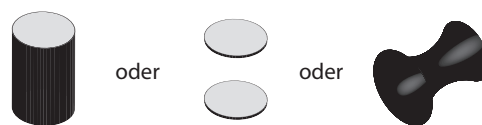


Abbildung 1.22: Mögliche Kandidaten für die kleinste Fläche zwischen Kreisen als Rahmen: Zylinder, zwei Ebenen, Katenoid. Die optimale Lösung hängt von Abstand und Radius der Kreise ab, aber das Katenoid ist immer besser als der Zylinder.

1 Lagrange-Mechanik

Anwendungen: Seifenfilme auf Drahtschlaufen; Leichtbauwerke: z.B. Olympiadach München; Bionik / Biomimetik (z.B. Spinnennetze)

3) Brachistochronen-Problem

Auf welchem Weg $y(x)$ gelangt ein reibungslos gleitender Massenpunkt im Schwerfeld am schnellsten von 1 zu 2 ?

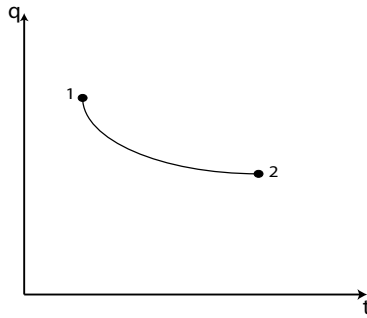


Abbildung 1.23: Brachistochrone: kürzeste Gleitzeit im Schwerfeld zwischen zwei Punkten

brachistos kürzeste; chronos Zeit (Johann Bernoulli 1696)

Eine solche Gleitschiene ist im Landesmuseum Mannheim ausgestellt.

- 4) Kettenlinie - welche Form $y(x)$ nimmt ein Seil der Länge L an, das im Schwerfeld zwischen zwei gegebenen Punkten aufgehängt wird ? Im Gegensatz zu den Beispielen 1) - 3) gibt es jetzt eine Nebenbedingung, nämlich die konstante Seillänge L .
- 5) Isoperimetrisches Problem: welche Kurve der Länge L umfasst den größten Flächeninhalt A ?

1 Lagrange-Mechanik

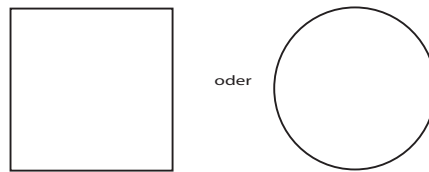


Abbildung 1.24: Welche Kurve erzeugt den größten Flächeninhalt ? Vergleich Quadrat - Kreis.

$$\text{Quadrat: } A = D^2 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}$$

$$\text{Kreis: } A = \pi R^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

Da $\pi < 4$, ist der Kreis besser. Ist er aber auch optimal ?

In drei Dimensionen: welche Fläche mit Flächeninhalt A erzeugt das größte Volumen ?

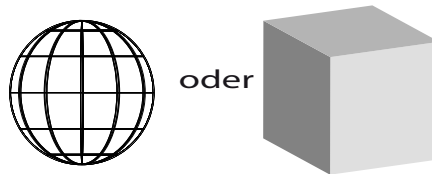


Abbildung 1.25: Welche Fläche erzeugt das größte Volumen ? Vergleich Kugel - Würfel.

$$\text{Quader: } V = D^3 = \left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = 0,07A^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Kugel: } V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} = 0,1A^{\frac{3}{2}}$$

Die Kugel ist also besser. Ist sie aber auch optimal ?

In beiden Fällen gibt es wieder eine Nebenbedingung (konstanter Umfang bzw. Fläche).

- 6) Geodätische Linien - Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Fläche?



Abbildung 1.26: Die Geodäte ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der gegebenen Fläche, z.B. bei einer Wanderung im Gebirge

Nebenbedingung: implizit definierte Fläche durch $\phi(x, y, z) = 0$

Diese Nebenbedingung ist komplexer als in den Beispielen 4) und 5), da sie an jedem Punkt gilt.

Anwendung: Wanderung im Gebirge

Zweidimensionale Taylor-Entwicklung

Weiter unten benötigen wir die Taylor-Entwicklung in zwei Dimensionen. In einer Dimension lautet die Taylor-Reihe für eine Funktion $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$

wobei wir kleine Abweichungen Δx um den Punkt x_0 betrachten und deshalb nur Terme bis zur zweiten Ordnung angegeben haben. Für ein Extremum muß der lineare Term verschwinden, d.h. die erste Ableitung muß gleich Null sein. Ob es ein Minimum, Maximum oder Sattel ist, muß man mit Hilfe der zweiten Ableitung entscheiden.

Für eine zweidimensionale Funktion $f(x, y)$ kann ebenfalls eine Taylor-Reihe hergeleitet werden (Gegenstand der Analysis 2). Da es jetzt partielle Ableitungen in x und y gibt, sind darin mehr Terme enthalten, aber die grundlegende Struktur

1 Lagrange-Mechanik

ist ganz ähnlich wie in einer Dimension. Bis in zweite Ordnung findet man:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + \dots \end{aligned}$$

Für ein Extremum müssen jetzt zwei lineare Terme gleichzeitig verschwinden:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (1.53)$$

Die Entscheidung über Minimum, Maximum oder Sattel liegt wieder an den Termen zweiter Ordnung. Allerdings taucht hier eine neue Art von Sattel auf, der nicht das Verschwinden der zweiten Ableitung erfordert: wenn die Fläche $f(x, y)$ am Extremum in die beiden Koordinatenrichtungen gegensätzlich gekrümmt ist, dann liegt ein Sattel in der Art eines Pferdesattels vor. Mathematisch bedeutet das, dass es in zwei Dimensionen mehr als eine Art von Krümmung gibt (mittlere und Gauss'sche Krümmung).

Variation ohne Nebenbedingung

Wir versuchen, folgende Frage zu beantworten: welche Funktion $y(x)$ minimiert das Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y(x), y'(x), x) \quad (1.54)$$

Bemerkung: wir betrachten vorerst keine Nebenbedingungen, das entspricht den Beispielen 1) - 3), aber nicht 4) - 6). Wir betrachten nur $F = F(y, y', x)$, nicht z.B. $F = F(y, y', y'', x)$. Die Randwerte $y(x_1)$ und $y(x_2)$ werden nicht variiert. Diese Einschränkungen können später aufgehoben werden, bei uns sind sie durch die Lagrange-Mechanik motiviert.

Für die stationäre Lösung $y(x)$ muß jede Abweichung $\delta y(x)$ zu einem größeren Wert $J[y + \delta y]$ führen. Um die Variation der Funktion auf eine Variation einer reellen Zahl zurückführen zu können, die wir aus der Analysis schon kennen, verwenden wir $\delta y(x) = \varepsilon \eta(x)$, mit $\varepsilon \ll 1$, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, $\eta(x)$ differenzierbar, aber sonst beliebig \Rightarrow das Funktional $J[y + \varepsilon \eta]$ ist jetzt eine Funktion von ε und wir können

1 Lagrange-Mechanik

nach dem Minimum suchen. Wir verlangen also:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dJ[y + \varepsilon\eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= 0 \\
 J[y + \varepsilon\eta] &= \int_{x_1}^{x_2} dx F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F(y, y', x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \varepsilon\eta(x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \varepsilon\eta'(x) \right\} + O(\varepsilon^2) \\
 \left. \frac{dJ[y + \varepsilon\eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right\} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \eta(x) + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} = 0
 \end{aligned}$$

Wir haben hier zuerst eine zwei-dimensionale Taylor-Reihe bis zur ersten (linearen) Ordnung verwendet und dann die Tatsache, dass für ein Extremum beide linearen Terme verschwinden müssen. Dann haben wir eine partielle Integration verwendet. Der letzte Term mit der Stammfunktion verschwindet wegen der festgehaltenen Endpunkte, also wegen $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Da $\eta(x)$ beliebig ist, muß die geschweifte Klammer verschwinden:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \tag{1.55}$$

Diese Grundgleichung der Variationsrechnung heisst *Euler-Lagrange-Gleichung*. Ausgeschrieben:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1.56}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist also eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für die gesuchte Funktion $y(x)$. Sie ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum (Minimum oder Maximum). Zu jedem Funktional gehört eine Euler-Lagrange-Gleichung. Umgekehrt kann man für viele Differentialgleichungen ein zugehöriges Funktional finden.

Kurzfassung der Herleitung:

$$\begin{aligned}
 0 = \delta J &= J[y + \delta y] - J[y] \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right\} = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\}}_{=0} \delta y
 \end{aligned}$$

Anwendung auf Lagrange-Mechanik: Wirkungsfunktional

Die grundlegende Variable ist jetzt die Zeit t , also $x \rightarrow t$. Die zu optimierende Funktion ist eine generalisierte Koordinate q , also $y(x) \rightarrow q(t)$.

Die Lösung $q(t)$ der Lagrange-Gleichung macht das *Wirkungsfunktional* extremal:

$$\boxed{S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)} \quad \text{Wirkungsfunktional} \quad (1.57)$$

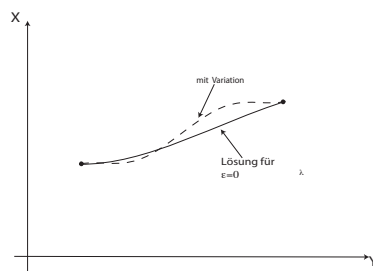


Abbildung 1.27: Hamilton'sches Prinzip: die tatsächliche Bewegung optimiert die Wirkung

Hamilton'sches Prinzip: Bei festem t_1 und t_2 und festem $q(t_1) = q_a$ und $q(t_2) = q_e$ erfolgt die Bewegung so, dass $S[q]$ extremal ist. Das Hamilton'sche Prinzip lässt sich leicht auf nicht-mechanische Systeme erweitern und ist ein Ausgangspunkt für statistische Mechanik und Quantenmechanik.

Zusammenfassend haben wir in der Lagrange-Mechanik also schon zwei mögliche Umformulierungen der Newton'schen Bewegungsgleichungen kennengelernt:

$$\boxed{\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)} \quad \text{Wirkungsfunktional: Integralprinzip}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0} \quad \text{Lagrange-Gleichungen: differentielles Prinzip}$$

Beispiele Variation ohne Nebenbedingungen

- 1) Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene

1 Lagrange-Mechanik

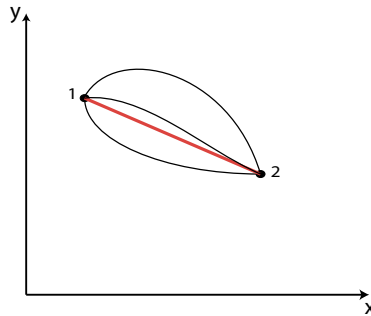


Abbildung 1.28: Die Geodäte in der Ebene ist eine Gerade.

$$\text{Bahnlänge } L = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + y'^2(x)}}_{F(y, y', x)}$$

Euler-Lagrange-Gleichung für $F(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\frac{1}{2}2y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \Rightarrow y' = \text{const.} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{y = ax + b} \quad \text{Die kürzeste Verbindung ist eine Gerade}$$

2) Minimale Rotationsfläche

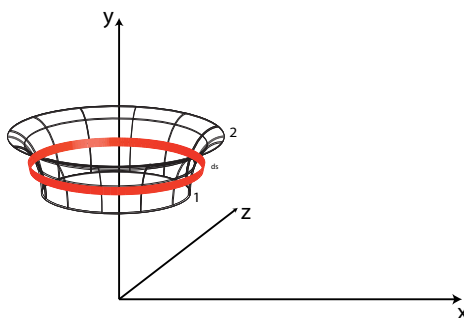


Abbildung 1.29: Welche Form hat eine Rotationsfläche mit minimalem Flächeninhalt ?

1 Lagrange-Mechanik

Welche hat minimalen Inhalt? Seifenfilm! Rotationssymmetrie \rightarrow 1D-Problem
 differentieller Ring: $dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi x dx \sqrt{1 + y'^2}$

$$\Rightarrow A = \int_{x_1}^{x_2} dx 2\pi x \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y', x)} \quad (1.58)$$

Euler-Lagrange-Gleichung für $F(y, y', x) = x\sqrt{1 + y'^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\frac{1}{2}2y'x}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const} = a \\ \Rightarrow y'^2 x^2 &= a^2(1 + y'^2) \Rightarrow y' &= \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ \Rightarrow y &= a \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b \\ \Rightarrow x &= a \cosh\left(\frac{y - b}{a}\right) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Für zwei Ringe oben und unten ergibt das genau das Katenoid. Die mathematische Funktion dahinter ist also der Kosinus Hyperbolicus.

- 3) Brachistochrone: Auf welchem Weg gelangt ein gleitender Massenpunkt im Schwerfeld am schnellsten von $(x_1, 0)$ zu (x_2, y_2) ?

Geschwindigkeit v aus Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2}v^2 - mgy = \frac{m}{2}v_1^2 - mgy_1 = 0 \quad (1.60)$$

Anfangsbedingungen: $v_1 = 0 \quad y_1 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

Gleitzeit:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{(x_1, 0)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}}_{F(y, y', x)} \quad (1.61)$$

Euler-Lagrange-Gleichung für F:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2y^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}$$

1 Lagrange-Mechanik

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \\
 &= y' \left\{ \frac{-y'}{2y^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+y'^2}} \right\} + y'' \left\{ \frac{1}{y^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{y^{\frac{1}{2}} (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
 &= \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{\frac{3}{2}}} \quad | \cdot (-2)y^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+y'^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 1 + y'^2 &= y'^2 - 2yy'' + \frac{2yy'^2 y''}{(1+y'^2)} \\
 \Rightarrow (1 + 2yy'')(1 + y'^2) &= 2yy'^2 y'' \\
 \Rightarrow 1 + 2yy'^2 y'' + y'^2 + 2yy'' &= 2yy'^2 y'' \\
 \Rightarrow \underbrace{y'(1 + y'^2) + y(2y'y'')}_{\frac{d}{dx}(y(1+y'^2))} &= 0 \\
 \Rightarrow y(1 + y'^2) &= a = \text{const} \tag{1.62}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-y}{y} \Rightarrow \boxed{dx = \sqrt{\frac{y}{a-y}} dy} \tag{1.63}$$

Substitution: $y = a \sin^2 \varphi$

$$\begin{aligned}
 dy &= 2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\
 \Rightarrow x &= x_1 + \int_0^y dy \sqrt{\frac{y(a)}{a-y}} = x_1 + 2a \int_0^\varphi d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \\
 &= x_1 + 2a \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \\
 &= x_1 + a \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \\
 y &= a \sin^2 \varphi = \frac{a}{2} (1 - \cos 2\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi &= 2\varphi + \pi, \quad a = 2R, \quad x_1 = R\pi \\
 \Rightarrow x &= 2R \left(\frac{\Psi - \pi}{2} - \frac{1}{2} \sin(\Psi - \pi) \right) + R\pi \\
 \Rightarrow \boxed{x = R\Psi + R \sin \Psi} \\
 y &= R(1 - \cos(\Psi - \pi)) \Rightarrow \boxed{y = R(1 + \cos \Psi)}
 \end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

Das sind genau die Formeln für eine Zykloide ! Anfangsbedingungen: $y = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \Psi = \pi \Rightarrow$ Wir starten also genau mit der Spitze der Zykloide, im ersten Moment fällt das Teilchen also vertikal und nimmt dabei viel Geschwindigkeit auf. Dann gleitet es nach rechts, da es ja den rechten Punkt erreichen muß.

Verallgemeinerungen der Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir diskutieren jetzt verschiedene wichtige Verallgemeinerungen der Euler-Lagrange-Gleichung, die im allgemeinen Fall auch miteinander kombiniert werden können.

- (1) Mehrere Funktionen: bisher hatten wir nur eine Funktion, also nur einen Freiheitsgrad, $S = 1$. Jetzt betrachten wir S Funktionen $y_1(x), \dots, y_s(x)$.

$$\Rightarrow F = F(y_1, \dots, y_s, y'_1, \dots, y'_s, x)$$

Achtung: Integral nach wie vor über x !

$$\begin{aligned} J(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_S) &= J[y_1 + \varepsilon_1 \eta_1, \dots, y_S + \varepsilon_S \eta_S] \text{ stationär bei } \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_S = 0 \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial J(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_S)}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} &= 0 \quad 1 \leq i \leq S \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} &= 0 \end{aligned}$$

Das ist eine Euler-Lagrange-Gleichung für jede Komponente, also insgesamt ein System von S ODEs, $2S$ Anfangsbedingungen nötig zur Lösung. Das ist genau die allgemeine Situation in der analytischen Mechanik ! Wir bekommen also wieder das gleiche System von Bewegungsgleichungen wie zuvor.

- (2) Mehrere Argumente: sei $y = y(x_1, \dots, x_N)$

$$J[y] = \int dx_1 \dots \int dx_N \quad F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_N}, x_1, \dots, x_N\right)$$

Variation:

$$\begin{aligned} \delta y = \varepsilon \eta(x_1, \dots, x_N) &\Rightarrow J(\varepsilon) = J[y + \delta y] \\ \Rightarrow \text{Funktion } J(\varepsilon) \text{ mit } \left. \frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_0} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

In diesem Fall gibt es also nur eine Gleichung, aber jetzt handelt es sich nicht mehr um eine ODE (gewöhnliche Differentialgleichung), sondern um eine PDE (partielle Differentialgleichung). Eine wichtige Anwendung sind Funktionale für Flächen, die ja zwei interne Koordinaten haben. Das bekannteste Beispiel sind die Minimalflächen ohne Rotationsymmetrie, dann hat man ein wirklich zwei-dimensionales Problem.

- (3) Höhere Ableitungen: z.B. das Funktional $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', y'', x)$, also die Hinzunahme von zweiten Ableitungen (Krümmungen).

Die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung sieht folgendermassen aus:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}}_{\text{ODE 2. Ordnung}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \quad (1.64)$$

ODE 4. Ordnung

Beispiel: PTP 1, Kapitel 1.4, Krümmungsenergie von Polymeren. Allgemein tauchen solche Probleme mit höheren Ableitungen typischerweise in der Elastizitätstheorie auf.

Variation mit Nebenbedingungen

Die obigen Beispiele ④- ⑥ waren Variationen mit Nebenbedingungen. Wie geht man in diesem Fall vor ?

Beispiel 4: Kettenlinie, also Seil im Schwerfeld zwischen zwei Aufhängepunkten. Minimiert wird die potentielle Energie

$$J[y] = \int_{P_1}^{P_2} \underbrace{\rho ds}_{\text{Massenelement}} \quad gy = g\rho \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{y \sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y', x)} \quad (1.65)$$

Nebenbedingung: Seillänge L vorgegeben

$$L = K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_{G(y, y', x)} \quad (1.66)$$

Wie minimiert man $J[y]$ mit Nebenbedingung $K[y] = \text{const}$? Dafür betrachten wir erst den reellen Fall.

Minimierung mit Nebenbedingung für reelle Funktionen

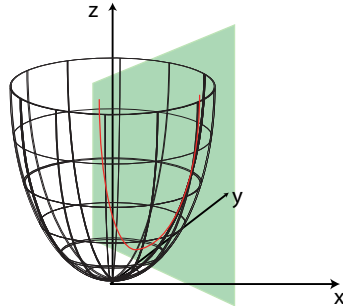


Abbildung 1.30: Eine parabolische Funktion hat ihr Minimum im Ursprung.

Wie findet man das Minimum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$?

Lösung durch Elimination: Auflösen der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ergibt eine Funktion $y_g(x)$. Einsetzen in $f(x, y)$ ergibt eine ein-dimensionale Zielfunktion $h(x) = f(x, y_g(x))$. Minimierung:

$$\Rightarrow 0 = h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_g(x) \Rightarrow x_m \Rightarrow y_m = y_g(x_m) \quad (1.67)$$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$, Minimum bei $(0, 0)$. Nebenbedingung: $g(x, y) = y - 1 + x \Rightarrow y_g(x) = 1 - x \Rightarrow h(x) = x^2 + (1 - x)^2 \Rightarrow h'(x) = 4x - 2 \Rightarrow x_m = 1/2 \Rightarrow y_m = 1/2$.

Problem: $g(x, y)$ lässt sich typischerweise nicht nach $y_g(x)$ auflösen!

Lösung: Einführung eines *Lagrange-Parameters* λ

Wir betrachten $\bar{f}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ und minimieren nach allen drei Variablen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} = g \end{aligned}$$

Wir denken uns $y_g(x)$ als bekannt und ersetzen $g(x, y)$ durch die äquivalente Nebenbedingung $\bar{g}(x, y) = y - y_g(x)$. Dies entspricht einer Linearisierung der Nebenbedingung, ändert aber nichts an ihren Nullstellen (nur die sind relevant). Dann

gilt:

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda y'_g(x) \\ 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_g = 0 \quad (1.68)$$

Zusammen mit der dritten Gleichung $g = 0$ erhalten wir also genau die gleichen Ergebnisse wie bei Elimination. Die Minimierung mit Lagrange-Parameter ist also äquivalent zur Minimierung durch Elimination. Dabei kommt zwar ein neuer Parameter λ ins Spiel, der wird aber am Schluss durch $g = 0$ bestimmt. Der Vorteil besteht darin, dass wir nicht explizit auflösen müssen. Achtung: $g = 0$ wird erst am Ende verwendet, um λ zu bestimmen, sonst würde man von Anfang an nur Null addieren.

Anwendung auf das einfache Beispiel

$$\bar{f} = f + \lambda g = x^2 + y^2 + \lambda(y - 1 + x)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} &= 2x + \lambda \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} &= 2y + \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y = -\frac{\lambda}{2} \quad (1.69)$$

λ eliminieren durch Nebenbedingung: $0 = g(x, y) = -\lambda - 1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow x_m = y_m = \frac{1}{2}$

Minimierung mit Nebenbedingung für Funktionale

Bei der üblichen Variation $\delta y(x) = \varepsilon \eta(x)$ wird in der Regel die Nebenbedingung verletzt. Deshalb verwenden wir jetzt die Variation $\delta y(x) = \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x)$. Zusammen können diese 2 Variationen die Nebenbedingung erfüllen. Das Zielfunktional $J[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2] = J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ entspricht einer Fläche über der $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -Ebene. Die Nebenbedingung $K[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2] = L = const = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ entspricht einer Kurve in der $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -Ebene. Damit haben wir genau die Situation der Minimierung mit Nebenbedingung für eine reele zwei-dimensionale Funktion. Wir lösen das Problem mit der Methode der Lagrange-Parameter.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Minimiere } & J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - L) \\ \Rightarrow \frac{\partial(J + \lambda K)}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} &= 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \end{aligned}$$

ε_1 und ε_2 haben symmetrische Funktionen und führen deshalb auf die gleiche Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 0 \quad \text{mit } \bar{F} = F + \lambda G$$

Das ergibt eine Lösung $y(x, \lambda)$, dann kann λ festgelegt werden durch die Nebenbedingung.

Anwendung auf Kettenlinie

$$\bar{F} = F + \lambda G = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \quad (1.70)$$

$$= (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2} = \bar{F}(y, y') \quad (1.71)$$

Diese Funktion hängt von x nur implizit ab. Daraus folgt eine Erhaltungsgröße.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{d\bar{F}}{dx} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} y' + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y'' \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y' \right) &= \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} \right)}_{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}} y' + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y'' = \frac{d\bar{F}}{dx} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dx} \underbrace{\left(\bar{F} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y' \right)}_{=\text{const}=a} = 0 \\ a &= \bar{F} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y' = (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2} - \frac{(y + \lambda)y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \\ &= (y + \lambda) \left(\frac{1 + y'^2 - y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} \\ &\Rightarrow y'^2 = \frac{(y + \lambda)^2}{a^2} - 1 \end{aligned}$$

Einfache Überlegung: λ und a können rausskaliert werden, die Grundstruktur der Gleichung lautet also $y'^2 = y^2 - 1$. Das wird durch $\cosh(x)$ gelöst:

$$y = \cosh(x) \Rightarrow y' = \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

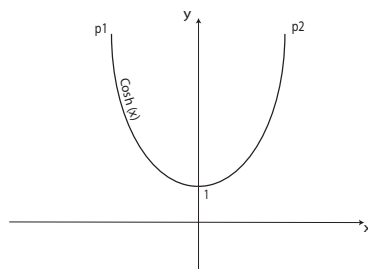


Abbildung 1.31: Die Kettenlinie hat die Form eines Kosinus Hyperbolicus.

1 Lagrange-Mechanik

Vollständige Lösung:

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) - \lambda} \quad (1.72)$$

Die Parameter a , b und λ müssen aus Neben- und Randbedingungen bestimmt werden. Die Form der Kettenlinie ist ein Kosinus Hyperbolicus. Die gleiche Funktion hatten wir schon bei der minimalen Rotationsfläche gefunden. Ihr exponentieller Charakter führt zu einer starken Krümmung nach innen bzw. unten: bei der Minimalfläche soll möglichst viel Fläche innen an der Drehachse liegen, bei der Kettenlinie möglichst viel Länge unten im Gravitationspotential.

Wir lösen das Problem jetzt für konkrete Aufhängepunkte $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Die Spiegelsymmetrie um $x = 0$ führt zu $b = 0$. λ folgt aus der Forderung an den Aufhängepunkte:

$$x = 1 \Rightarrow \lambda = a \cosh \frac{1}{a} \Rightarrow y(x) = a \left[\cosh \frac{x}{a} - \cosh \frac{1}{a} \right]$$

Jetzt ist noch a offen, das die Länge der Kette bestimmt.

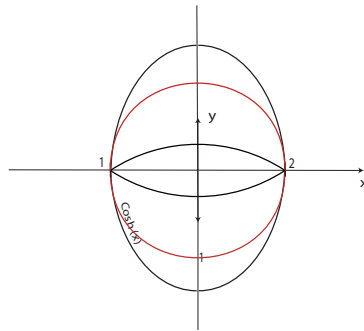


Abbildung 1.32: Die Kettenlinie bei Variation des Parameters a .

Berechnung der Länge:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 + y'^2} = \int_{-1}^1 dx \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-1}^1 = 2a \sinh \frac{1}{a} \Rightarrow a = a(L) \end{aligned}$$

Diese Beziehung löst man am einfachsten graphisch. Für jedes gegebene L gibt es zwei Lösungen $\pm a_0$. Die positive Lösung entspricht dem gesuchten Seil, das

1 Lagrange-Mechanik

nach unten hängt. Die negative Lösung entspricht einem Seil, das seine potentielle Energie maximiert. Diese Lösungen haben wir nicht gesucht, aber sie hat eine interessante Anwendung in der Architektur: da in diesem Problem die Gewichtskräfte ausschließlich durch Spannungen in der Linie kompensiert werden, ist diese die optimale Form für einen Torbogen, der die Gewichtskraft des Materials ausschließlich in Kompressionskräfte im Bogen umsetzt (also zum Beispiel keine Scher- oder Biegekräfte erzeugt, die das Material stärker belasten würden).

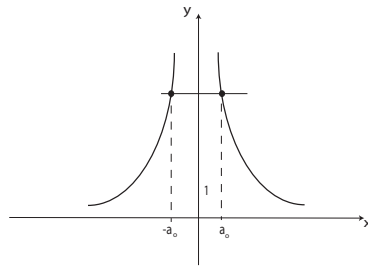


Abbildung 1.33: Graphische Lösung der Beziehung $L(a)$.

Beispiel 5: Das isoperimetrische Problem ist vom gleichen Typ wie Beispiel 4.

Beispiel 6: Geodätische Linien

Wir betrachten eine Kurve in drei Dimensionen parametrisiert durch die Zeit t :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten entspricht in dieser Parametrisierung der Minimierung des Funktionals

$$J[x, y, z] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\overbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}^{F(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)}} \tag{1.74}$$

Dies ist die Verallgemeinerung von $J = \int dx \sqrt{1 + y'^2}$ in der Ebene bei Parametrisierung durch x . Da wir jetzt drei Funktionen haben, ergeben sich drei Euler-Lagrange-Gleichungen.

Wir suchen die kürzeste Verbindung unter der Nebenbedingung, dass die Kurve auf einer gegebenen Fläche verläuft. Diese Fläche wird definiert durch $g(x, y, z) = 0$.

1 Lagrange-Mechanik

Beispiel Höhenfunktion: $z - \underbrace{h(x, y)}_{g(x, y, z)} = 0$. Diese Nebenbedingung gilt an jeder Stelle

t und ist damit eine viel stärkere Einschränkung als bisher, wo wir es nur mit Integralbedingungen zu tun hatten.

Lösung: ein Lagrange-Parameter λ_t für jedes t .

\Rightarrow Lagrange-Funktion $\lambda(t)$

\Rightarrow neues Zielfunktional $\bar{F} = F + \lambda(t)g(x, y, z)$

\Rightarrow Euler-Lagrange-Gleichung für $x(t)$ (analog für $(y(t), z(t))$)

Euler-Lagrange-Gleichung für $x(t)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) = 0$$

$$F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v \quad \text{Geschwindigkeit}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{v} - \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

Parametrisierung durch die Bogenlänge: $s = s(t)$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d}{dt} = v \frac{d}{ds}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v \frac{dx}{ds} = vx', \quad \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{v} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{ds} = v \frac{d^2x}{ds^2} = vx''$$

$$\Rightarrow \boxed{x'' = \frac{\lambda(t)}{v(t)} \frac{\partial g}{\partial x}} \tag{1.75}$$

Beispiel: Kugel

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow x'' = 2 \underbrace{\frac{\lambda(t)}{v(t)}}_{=: \mu(t)} x$$

Zweimaliges Differenzieren von g :

$$0 = \underbrace{x'^2 + y'^2 + z'^2}_{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}=1} + \underbrace{xx'' + yy'' + zz''}_{\text{Euler-Lagrange-Gleichung einsetzen}}$$

$$\Rightarrow 0 = 1 + \mu \left(x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} \right) = 1 + 2\mu R^2$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{-1}{2R^2} = \text{const}$$

1 Lagrange-Mechanik

$$\Rightarrow \boxed{x'' + \frac{x}{R^2} = 0} \quad (1.76)$$

Wir haben also den harmonischen Oszillator gefunden. Die geometrische Nebenbedingung führt bei der Rechnung in kartesischen Koordinaten also zu linearen Kräften.

Insgesamt haben wir ein System von drei ODEs. Hier sind die Gleichungen für x , y und z entkoppelt. Die Lösung ist also

$$x(t) = A \sin\left(\frac{s}{R}\right) + B \cos\left(\frac{s}{R}\right) \quad (1.77)$$

und analog für y und z . Wir legen die Kugel so, dass $z = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \frac{s}{R} \\ R \cos \frac{s}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist genau die Gleichung für einen Kreis. \Rightarrow Die Geodätischen auf der Kugel sind die *Grosskreise*.

Dieses Beispiel zeigt die enge Kopplung von Geometrie und Kräften in der Physik. Hier führte die Geometrie zu bestimmten Kräften; umgekehrt kann man Kräfte auch als geometrische Bedingungen umformulieren (zB in der Allgemeinen Relativitätstheorie).

1.5 Hamilton'sches Prinzip

Wir haben oben schon gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen auch als die Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung für das Wirkungsfunktional betrachtet werden können. Daraus folgt das Hamilton'sche Prinzip (oder *Prinzip der kleinsten Wirkung*): die Bewegung $\mathbf{q}(t)$ erfolgt so, dass $s(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ stationär ist $\Rightarrow \delta S = 0$.

Herleitung aus dem D'Alembert'schen Prinzip

Wir beginnen wieder mit einer Projektion auf die virtuelle Verrückung $\delta \mathbf{r}$, also auf eine Variation ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{Z}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \Big| \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (1.78)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \delta \mathbf{r}_i}_{=\delta W=0} = 0 \quad (1.79)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i) - \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \delta \dot{\mathbf{r}}_i}_{\frac{1}{2} \delta(\dot{\mathbf{r}}_i^2)} \quad (1.80)$$

$$\mathbf{K}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (1.81)$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \left\{ \underbrace{\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i)}_{=0} - \underbrace{\frac{m_i}{2} \delta(\dot{\mathbf{r}}_i^2)}_{-\delta T} - \underbrace{(-\nabla_i V) \delta \mathbf{r}_i}_{-\delta V} \right\} \quad (1.82)$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \underbrace{(T - V)}_{=L} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \delta S \quad (1.83)$$

Das $\delta \mathbf{r}$ der virtuellen Verrückung entspricht also am Ende dem δS der Variationsrechnung.

Mechanik à la Landau-Lifschitz

Für das Aufstellen von Bewegungsgleichungen verwendet man in der Regel die Lagrange-Gleichungen. Das Hamilton'sche Prinzip dagegen ist der übliche Ausgangspunkt für allgemeine Betrachtungen (Symmetrie-Überlegungen, Aufstellen neuer Theorien). Manche Lehrbücher wie der Landau-Lifschitz stellen das Hamilton'sche Prinzip sogar als Axiom an den Anfang der Mechanik. Das wollen wir hier kurz skizzieren.

Wir nehmen an, dass eine Funktion L existiert, so dass $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$ bei der Bewegung minimiert wird. Wie sieht L für ein freies Teilchen aus?

- 1) Mechanische Bewegung ist durch Anfangsposition und Geschwindigkeit bestimmt $\Rightarrow L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$
- 2) Die Zeit ist homogen $\Rightarrow L$ darf nicht explizit von t abhängen
- 3) Der Raum ist homogen $\Rightarrow L$ darf nicht explizit von \mathbf{q} abhängen

1 Lagrange-Mechanik

4) Der Raum ist isotrop $\Rightarrow L$ darf nicht von der Richtung von $\dot{\mathbf{q}}$ abhängen

Einfachste Möglichkeit $L = C\dot{\mathbf{q}}^2$. Die Konstante C wird gleich $C = \frac{m}{2}$ gesetzt $\Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 = T$. Mehrteilchensysteme: Erweiterung um eine skalare Funktion, $L = \bar{L} - U$, so dass U die instantane Wechselwirkung zwischen den Teilchen widerspiegelt und deshalb nur von den Koordinaten anhängen darf. Die Funktionalvariation führt dann auf $m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U$. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen folgen also aus ganz allgemeinen Symmetrieüberlegungen und bilden somit nicht die Grundlage der Mechanik, sondern eine Folgerung. Kräfte werden nicht über die Alltagserfahrung definiert, sondern als Ableitungen von Potentialen.

Eichtransformationen

$\delta S = 0 \Rightarrow L^* = CL$ oder $L^* = L + C$ ergeben die gleichen Bewegungsgleichungen. Die Bewegungsgleichungen sind außerdem invariant unter sogenannten *Eichtransformationen*:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \rightarrow L^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \underbrace{\frac{d}{dt}f(\mathbf{q}, t)}_{=:L_f} \quad (1.84)$$

Beweis:

$$S^* = \int_{t_1}^{t_2} dt L^* \quad (1.85)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt L + \underbrace{f(\mathbf{q}(t_2), t_2) - f(\mathbf{q}(t_1), t_1)}_{\text{verschwindet bei Variation}} \quad (1.86)$$

$$\Rightarrow \delta S^* = \delta S \quad (1.87)$$

Die Herleitung auf der Ebene der Bewegungsgleichungen ist deutlich komplizierter:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_f}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{l=1}^S \frac{\partial f}{\partial q_l} \dot{q}_l \right\} \quad (1.88)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} + \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 f}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l = \frac{\partial}{\partial q_j} L_f \quad (1.89)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L_f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_f}{\partial q_j} = 0} \quad (1.90)$$

Der Beitrag von L_f hebt sich in den Bewegungsgleichungen heraus.

Beispiele

① Galilei-Transformation

$$\dot{\mathbf{r}} \rightarrow \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \quad \mathbf{v} = \text{const.}$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \rightarrow L^* = L + \underbrace{m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} + \frac{m}{2}\mathbf{v}^2}_{\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\mathbf{r} + \frac{m}{2}\mathbf{v}^2t)}$$

Die Galilei-Transformation entspricht also einer Eichtransformation und ändert deshalb die Bewegungsgleichungen nicht.

② Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Lorentz-Kraft: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow$ Die Lagrange-Gleichungen für konservative Systeme gelten nicht wegen der Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Wir gehen zurück zum Fall holonomer Zwangsbedingungen ohne die Annahme konservativer Kräfte:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = Q_j \text{ verallgemeinerter Kraftkomponente}$$

Elektromagnetische Potentiale aus den Maxwell-Gleichungen:

1. $\varphi(\mathbf{r}, t)$ skalares Potential
2. $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ Vektorpotential

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.91}$$

Verallgemeinertes Potential: $U = q(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A})$

Verallgemeinerte Lagrange-Funktion: $L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + q(\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}) - q\varphi$

Verallgemeinerte Kraftkomponente: $Q_j := \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$

1 Lagrange-Mechanik

Entspricht Q_j der Lorentz-Kraft ? Beweis für x-Komponente

$$U = q(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A}), v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (1.92)$$

$$\Rightarrow Q_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = q \left\{ \frac{d}{dt}(-A_x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\mathbf{A}) \right\} \quad (1.93)$$

$$\text{Lorentz-Kraft: } F_x = q(E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x) \quad (1.94)$$

$$= q \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x \right\} \quad (1.95)$$

$$(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (1.96)$$

$$= \underbrace{\dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\mathbf{A})} - \underbrace{\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z}}_{-\frac{d}{dt}A_x + \frac{\partial A_x}{\partial t}} \quad (1.97)$$

$$\Rightarrow F_x = q \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right\} = Q_x \quad (1.98)$$

Die oben gemachten Definitionen führen also tatsächlich über die Lagrange-Gleichungen zu den richtigen Bewegungsgleichungen. Damit ist gezeigt, wie der Lagrange-Formalismus auch auf den nicht-mechanischen und nicht-konservativen Fall des Elektromagnetismus übertragen werden kann.

Wie sehen in diesem Fall mögliche Eichtransformationen aus ? Wir betrachten

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}$$

mit einer beliebigen Funktion $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$. Dann gilt

$$L \rightarrow L^* = L + q(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \chi + \frac{\partial \chi}{\partial t}) = L + q \frac{d\chi}{dt} \quad (1.99)$$

Diese Transformationen führen also zu einer totalen Ableitung für L und sind damit Eichtransformationen. In praktischen Anwendungen kann die geschickte Wahl von Eichtransformationen zur analytischen Lösung des Problems führen.

1.6 Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Lagrange-Gleichungen für holonome und konservative Systeme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (1.100)$$

1 Lagrange-Mechanik

führen für eine *zyklische Variable* direkt auf einen Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} =: p_j \quad (1.101)$$

Die Erhaltungsgröße p_j heisst der *generalisierte Impuls*. Sie folgt aus einer Symmetrie, nämlich der Invarianz unter einer generalisierten Verschiebung. Generell gilt: aus jeder Symmetrie folgt eine Erhaltungsgröße.

Wir betrachten im folgenden drei fundamentale Symmetrien, die für die meisten physikalischen Systeme gelten (falls nicht, kann dies in der Regel korrigiert werden, indem das System größer gewählt wird).

Homogenität der Zeit

Physikalische Systeme sind in der Regel invariant unter Zeittranslation. In der Mechanik äußert sich das darin, dass eine Trajektorie $\mathbf{q}(t)$ nur von $\mathbf{q}(t_A)$ abhängt, aber nicht von t_A . In der Lagrange-Funktion äußert sich das darin, dass es keine explizite Zeitabhängigkeit gibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \dot{q}_j \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L}_{=:H} \right) \end{aligned} \quad (1.102)$$

Es folgt also die Erhaltung der *Hamilton-Funktion* $H = H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

Skleronome Zwangsbedingungen: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$, $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (1.103)$$

$$\Rightarrow T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (1.104)$$

In diesem Fall gibt es also nur Quadratische Terme in $\dot{q}_j \Rightarrow T$ ist eine homogene

1 Lagrange-Mechanik

Funktion vom Grad 2 in den generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
 T(\alpha \dot{\mathbf{q}}) &= \alpha^2 T(\dot{\mathbf{q}}) \\
 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \alpha} \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial(\alpha \dot{q}_j)} \dot{q}_j &= 2\alpha T \\
 \stackrel{(\alpha=1)}{\Rightarrow} 2T &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \stackrel{\text{konserv. Syst.}}{=} \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j \\
 \Rightarrow H &= \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E \quad (1.105)
 \end{aligned}$$

Für konservative Systeme mit skleronomen Zwangsbedingungen ist die Hamilton-Funktion H genau die Gesamtenergie $E \Rightarrow$ Die Homogenität der Zeit bedingt Energieerhaltung. Für rheonome Systeme ist zwar die Hamilton-Funktion erhalten, aber nicht die Gesamtenergie. In diesem Fall leisten die Zwangskräfte richtige Arbeit und ändern so den Energiegehalt des Systems.

Beispiel

Perle auf rotierendem Draht

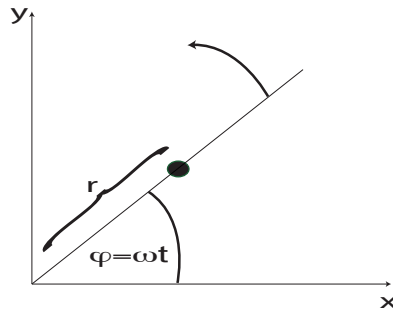


Abbildung 1.34: Perle auf rotierendem Draht

Rheonome Zwangsbedingungen: $\frac{y}{x} = \tan(\omega t)$, $q = r$

$$\begin{aligned}
 L = T = E &= \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) \quad \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\
 H = p\dot{q} - L &= m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - q^2\omega^2) \neq E
 \end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

Exakte Lösung für $q(0) = r_0, \dot{q}(0) = 0$

$q(t) = r_0 \cosh(\omega t)$ wächst exponentiell in der Zeit an

$E = m\omega^2 q^2 - \frac{m}{2} r_0^2 \omega^2$ wächst ebenfalls exponentiell in der Zeit an

$H = -\frac{m}{2} r_0^2 \omega^2 = \text{const} \leftarrow$ Erhaltungsgröße!

Homogenität des Raumes

Physikalische Systeme sind invariant unter Verschiebung im Raum. Wir betrachten diese Verschiebung als zyklische Variable durch geeignete Wahl des Koordinatensystems $\Rightarrow q_j$ beschreibe die Verschiebung um $\underbrace{\Delta q_j}_{\text{Betrag}} \underbrace{\mathbf{n}}_{\text{Richtung}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const.}$$

Konservatives System: $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \text{const}$$

Der Gesamtimpuls \mathbf{P} projiziert auf die Verschiebungsrichtung \mathbf{n} ist erhalten. Im allgemeinen ist \mathbf{n} beliebig $\Rightarrow \mathbf{P}$ erhalten. \Rightarrow Aus der Homogenität des Raumes folgt Impulserhaltung.

Isotropie des Raumes

Physikalische Systeme sind invariant unter Drehungen im Raum. Wahl einer Variablen q_j derart, dass Δq_j einer Drehung entspricht, mit Winkel $\Delta\varphi = \Delta q_j$ um eine Drehachse \mathbf{n} .

1 Lagrange-Mechanik

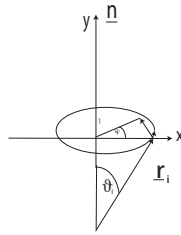


Abbildung 1.35: Bei einer Drehung ist nur der Teil des Ortsvektors relevant, der senkrecht auf die Drehachse steht.

$$|\Delta \mathbf{r}_i| = \Delta \varphi |\mathbf{r}_i| \sin \vartheta_i \quad \Delta \mathbf{r}_i \perp \mathbf{r}_i, \Delta \mathbf{r}_i \perp \mathbf{n}$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{r}_i = \Delta q_j (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i)$$

q_j ist zyklisch: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

$$\Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{n} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \underbrace{(m_i \dot{\mathbf{r}}_i)}_{\mathbf{P}_i})}_{\mathbf{L} = \text{Gesamtdrehimpuls}}$$

wobei wir im Spatprodukt die Vektoren zyklisch vertauscht haben. Im allgemeinen ist \mathbf{n} beliebig $\Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.}$

\Rightarrow Aus der Isotropie des Raumes folgt die Gesamtdrehimpulserhaltung.

Noether-Theorem

Dieses Theorem wurde 1918 von Emmy Noether aufgestellt, die später die erste Physikprofessorin in Deutschland wurde. Sie mußte im dritten Reich emigrieren und wurde dann Professorin in den USA. Heute ist das Nachwuchsgruppenprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) zu ihren Ehren benannt.

1 Lagrange-Mechanik

Das Theorem lautet: *Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie in der Lagrange-Funktion L gibt es eine Erhaltungsgröße.* Dieser Zusammenhang ist für die Physik von fundamentaler Bedeutung. In der Teilchenphysik zum Beispiel werden durch Streuung gefundene Erhaltungsgrößen wie der Isospin in entsprechend symmetrisierte Theorien umgesetzt (dafür benötigt man aus der Mathematik die Gruppentheorie).

Beweis:

Sei $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \alpha)$ eine Schar von Raumkurven mit $\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}(t)$. Es gelte Invarianz der Lagrange-Funktion unter Variation in α , d.h. $L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$.

$$\Rightarrow 0 = \left. \frac{dL(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (1.106)$$

$$= \sum_{j=1}^S \left. \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (1.107)$$

$$= \sum_{j=1}^S \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right)}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha}}_{\text{Erhaltungsgröße}} \Big|_{\alpha=0} \quad (1.108)$$

Beispiel: Translation im Raum

Kartesische Koordinaten: $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, $S = 3N$, Translation: $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{n}$.

$$\text{const} = \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}}_{m_i \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha}}_{=\mathbf{n}} \Big|_{\alpha=0} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (1.109)$$

Es folgt also wie erwartet Impulserhaltung in Richtung der Translationsinvarianz. Der Beweis für Drehungen erfolgt analog. Für Translation in der Zeit muß der Beweis leicht modifiziert werden, da die Zeit keine räumliche Koordinate ist. Die Erhaltung von Energie, Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls sind die drei wichtigsten Erhaltungsgrößen, die aus dem Noether-Theorem folgen.

1.7 Reibungskräfte

Bisher haben wir Systeme betrachtet, die holonom und konservativ sind. Im folgenden wollen wir jede dieser Bedingungen für sich aufheben. Wir beginnen mit

1 Lagrange-Mechanik

der Bedingung, dass das System konservativ ist. Als Beispiel verwenden wir den praktisch wichtigen Fall von Reibungskräften.

Systeme mit Reibungskräften sind nicht konservativ, d.h. es gibt keine (verallgemeinerte) Potentiale. Wir betrachten also holonome, aber nicht konservative Systeme und gehen zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem d'Alembert'schen Prinzip zurück. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j = \underbrace{Q_j^V}_{\text{konservativ}} + \underbrace{Q_j^R}_{\text{dissipativ}} \quad (1.110)$$

Wir unterscheiden also zwischen verallgemeinerten Kraftkomponenten, die aus einem Potential (V) und die aus Reibung (R) entstehen. Wir behandeln nur den einfachsten Fall, nämlich Stokes'sche Reibung, d.h. jedes Teilchen i erfährt eine Reibungskraft \mathbf{K}_i^R proportional zu seiner Geschwindigkeit, mit einem Reibungskoeffizienten γ_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^R &= -\gamma_i \dot{\mathbf{r}}_i \\ \Rightarrow Q_j^R &= \sum_{i=1}^N (-\gamma_i \dot{\mathbf{r}}_i) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N (-\gamma_i) \left(\sum_{l=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{l=1}^S \underbrace{\sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}}_{\beta_{jl}} \dot{q}_l \\ &\Rightarrow \boxed{Q_j^R = - \sum_{l=1}^S \beta_{jl} \dot{q}_l} \quad \text{lineare Kraft} \end{aligned} \quad (1.111)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^R = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{l,n=1}^S \beta_{ln} \dot{q}_l \dot{q}_n \right)}_{=:D} \quad (1.112)$$

wobei D die *Rayleighsche Dissipationsfunktion* ist. Damit haben wir eine modifizierte Lagrange-Gleichung für Stokes-Reibung hergeleitet:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0} \quad (1.113)$$

Für Reibungskräfte braucht man also zwei skalare Funktionen L und D . Die Matrix

$$\beta_{lm} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_m} = \beta_{ml} \quad (1.114)$$

ist symmetrisch und damit gilt $D \geq 0$ (semi-definite quadratische Form).

1 Lagrange-Mechanik

Wir berechnen jetzt die zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T + V)}{dt} = \frac{dV}{dt} + \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \quad (1.115)$$

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right)}_{2T} - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{\substack{= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}}} \dot{q}_j \quad (1.116)$$

Die erste Umformung gilt für skleronome Zwangsbedingungen, dann ist T homogen vom Grad 2.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt}(2T) - \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \underbrace{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}}_{2D} \right) \dot{q}_j \quad (1.117)$$

Im letzten Term verwenden wir, dass D homogen ist vom Grad 2.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dE}{dt} &= \frac{dV}{dt} + \underbrace{\sum_{j=1}^S \frac{\partial \overbrace{(T - L)}^V}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{\frac{dV}{dt}} + \frac{d}{dt}(2T) + 2D \\ &= 2 \frac{dE}{dt} + 2D \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -2D \leq 0} \end{aligned} \quad (1.118)$$

$$\quad (1.119)$$

Die Gesamtenergie sinkt also aufgrund der Reibung, und zwar bis das Gleichgewicht erreicht ist, also alle Teilchen zur Ruhe gekommen sind (ohne Geschwindigkeiten gibt es auch keine Reibung mehr). Wenn die Reibung klein ist, kann das allerdings sehr lange dauern. Ohne Reibung gilt $D = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$, es gilt Energieerhaltung wie oben schon gezeigt (immer unter der Voraussetzung skleronomer Zwangsbedingungen).

1.8 Nicht-holonome Systeme

Wir betrachten konservative Systeme, verzichten aber jetzt auf die Bedingung, dass das System holonom ist. Wir betrachten p Zwangsbedingungen, die in differentieller Form vorliegen. Falls diese Zwangsbedingungen sich nicht zu Funktionen

1 Lagrange-Mechanik

$f_p(r_1, \dots, r_N, t) = 0$ aufintegrieren lassen, dann haben wir nicht-holonome Zwangsbedingungen. Achtung: auch holonome Zwangsbedingungen lassen sich jederzeit in differentieller Form behandeln, das wird in den ersten beiden Beispielen auch gezeigt.

Wir gehen davon aus, dass das System ggf. schon auf S Freiheitsgrade q_j reduziert wurde, falls dafür geeignete Zwangsbedingungen vorliegen. Dann betrachten wir zusätzlich differentielle Zwangsbedingungen, die in linearisierter Form vorliegen:

$$\sum_{j=1}^S a_{ij} dq_j + b_i dt = 0 \quad 1 \leq i \leq p \quad (1.120)$$

Diese S Freiheitsgrade sind also nicht unabhängig voneinander. Für virtuelle Verückung ($\delta t = 0$) gilt:

$$\sum_{j=1}^S a_{ij} \delta q_j = 0$$

Wir berücksichtigen die differentiellen Zwangsbedingungen durch Einführung von p Lagrange-Parametern:

$$\sum_{j=1}^S \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \right\} \delta q_j = 0 \quad (1.121)$$

Wie in der Variationsrechnung begründet, wird jede Zwangsbedingung additiv mit einem Lagrange-Parameter angefügt. Wegen der Abhängigkeit der Variablen ist die Summe essentiell. Wir wählen unsere generalisierten Koordinaten so dass:

$$\begin{aligned} q_j \text{ mit } 1 \leq j \leq S - p & \quad \text{unabhängig} \\ q_j \text{ mit } S - p + 1 \leq j \leq S & \quad \text{abhängig} \end{aligned}$$

Die p Lagrange-Parameter werden jetzt so gewählt, dass für die abhängigen Variablen die geschweiften Klammern verschwinden. Die unabhängigen Variablen können dann getrennt variiert werden \Rightarrow Summe unnötig \Rightarrow geschweiften Klammern verschwinden in jedem Fall. Damit gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} = Q_j} \quad (1.122)$$

Das sind die *Lagrange-Gleichungen der 1. Art*. Die differentiellen Zwangsbedingungen führen zu verallgemeinerten Zwangskräften Q_j . Insgesamt handelt es sich um S

1 Lagrange-Mechanik

Gleichungen für $S+p$ Variablen (S Koordinaten q_j und p Lagrange-Multiplikatoren λ_i). Die p fehlenden Gleichungen sind die Zwangsbedingungen:

$$\boxed{\sum_{j=1}^S a_{ij} \dot{q}_j + b_i = 0} \quad (1.123)$$

Beispiele

① Atwood'sche Fallmaschine

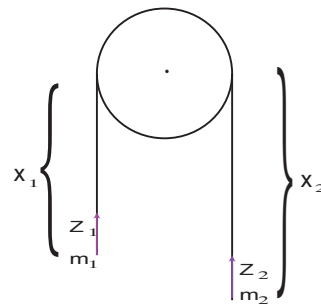


Abbildung 1.36: Die Atwood'sche Fallmaschine kann auch mit der Lagrange Methode der 1. Art behandelt werden.

Es gibt 5 holonome Zwangsbedingungen. Wir verwenden aber nur die ersten vier in diesem Sinne:

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0 \Rightarrow S = 2 \quad q_1 = x_1, q_2 = x_2 \quad (1.124)$$

Die 5. holonome Zwangsbedingung lautet:

$$x_1 + x_2 - l = 0 \quad (1.125)$$

Wir verwenden sie in der differentiellen Form:

$$\begin{aligned} \Rightarrow dq_1 + dq_2 &= 0 \\ \Rightarrow a_{11} &= a_{12} = 1, \quad b_1 = 0 \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + g(m_1 q_1 + m_2 q_2)$$

1 Lagrange-Mechanik

Lagrange-Gleichungen der 1. Art:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 - m_1 g &= \lambda \\ m_2 \ddot{q}_2 - m_2 g &= \lambda \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} Q_1 = Q_2 = \lambda \\ \lambda = \text{generalisierte Kraft} = \text{Zwangskraft} = Z \end{array} \quad (1.126)$$

Die dritte Gleichung kommt aus der differentiellen Zwangsbedingung:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$$

Damit haben wir 3 Gleichungen für 3 Unbekannte.

Lösung wie früher:

Subtraktion:

$$m_1 \ddot{q}_1 - m_2 \underbrace{\ddot{q}_2}_{-\ddot{q}_1} - (m_1 - m_2)g = 0 \quad (1.127)$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (1.128)$$

Addition:

$$m_1 \ddot{q}_1 + m_2 \underbrace{\ddot{q}_2}_{-\ddot{q}_1} - (m_1 + m_2)g = 2\lambda \quad (1.129)$$

$$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.130)$$

Die Zwangskraft zeigt der Koordinatenrichtung entgegen, also nach oben.

② Rollender Zylinder auf der schiefen Ebene

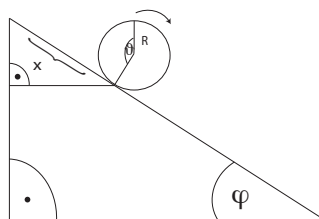


Abbildung 1.37: Ein Zylinder wird durch die Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene nach unten gezogen. Aufgrund der Reibung gleitet er nicht, sondern rollt.

1 Lagrange-Mechanik

Die typische Anwendung nicht-holonomer Zwangsbedingungen sind Rollbewegungen. Diese gibt es aber nur für ausgedehnte Zylinder, so dass wir zum ersten Mal einem starren Körper begegnen (beim Zykloidenpendel war die Scheibe masselos und trat deshalb nur als geometrische Randbedingung auf). Wir betrachten einen Zylinder, der auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel ϕ nach unten rollt.

$S = 2$ generalisierte Koordinaten: $q_1 = x$, $q_2 = \vartheta$.

Differentielle Zwangsbedingungen: Rollen, nicht Gleiten $\Rightarrow R d\vartheta = dx$. Diese Zwangsbedingung ist eigentlich integrierbar (holonom), $x = x_0 + R\vartheta$, wir bleiben aber bei der differentiellen Form: $p = 1$, $-dq_1 + R dq_2 = 0 \Rightarrow a_{11} = -1$, $a_{12} = R$, $b_1 = 0$.

Für die Lagrange-Funktion benötigen wir jetzt die kinetische Energie eines Zylinders, der gleichzeitig translatiert und rotiert. Wir betrachten zunächst die raumfeste Rotation.

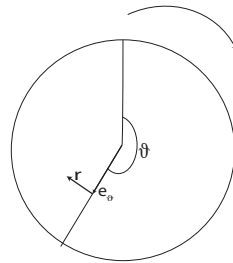


Abbildung 1.38: Die kinetische Energie des Zylinders folgt aus der Summe über alle Teilchen im Zylinder. Bei einer kontinuierlichen Massenverteilung benötigen wir also ein Integral.

Betrachte ein beliebiges Teilchen im Zylinder. Diese bewegt sich in der Richtung des Winkel-Einheitsvektors mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$, die für alle Teilchen gleich ist. Die Geschwindigkeit wird zusätzlich durch den Abstand r zur Drehachse bestimmt:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2, \quad \dot{\mathbf{r}} = r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\vartheta} \underbrace{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}_{r \mathbf{e}_\vartheta} \quad (1.131)$$

wobei wir einen Vektor definiert haben, der die Rotation beschreibt:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

1 Lagrange-Mechanik

Die Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektor ist die Drehachse, und sein Betrag ist gerade die Winkelgeschwindigkeit.

Die gesamte kinetische Energie des starren Körpers ist die Summe über alle Teilchen. Für einen makroskopischen Körper gehen wir in den Kontinuumslimit über:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \\
 &\rightarrow \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}}^2 \text{ Volumenintegral } (dxdydz = dV = d^3r = d\mathbf{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int dxdydz \rho(\mathbf{r}) \dot{\vartheta}^2 \underbrace{r^2}_{(x^2+y^2)} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 \underbrace{\int dxdydz \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2)}_{=: J \text{ Trägheitsmoment}}
 \end{aligned}$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ aus dem Integral gezogen werden konnte, da sie für alle Teilchen im Körper gleich ist. Die Koordinaten x und y beziehen sich auf die Ebene senkrecht zur Drehachse. Damit folgt unser erstes Teilergebnis für den starren Körper:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2} \tag{1.132}$$

Das Trägheitsmoment J ist bei der Rotation also äquivalent zur Masse m bei der Translation.

Beispiele:

Ⓐ Zylinder mit homogener Massenverteilung

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{r}) = \rho_0 &\Rightarrow J^{\text{Zylinder-K.}} = \rho_0 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz r^2 \\
 &= \rho_0 2\pi L \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \underbrace{(\rho_0 \pi R^2 L)}_M \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} M R^2
 \end{aligned}$$

Die Länge des Zylinders geht also nur in die Gesamtmasse M ein. Das Skalierungsverhalten mit M und R muß aus Dimensionsgründen so sein, aber der numerische Vorfaktor muß berechnet werden.

Ⓑ Hohlzylinder (z.B. rollendes Fass)

1 Lagrange-Mechanik

Die Wanddicke h wird als viel kleiner angenommen als der Radius R :

$$J = \rho_0 \int_{R-\frac{1}{2}h}^{R+\frac{1}{2}h} r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz r^2$$

$$\stackrel{h \ll R}{=} \rho_0 2\pi L h R^3 = \underbrace{(\rho_0 2\pi R L h)}_M R^2 = M R^2$$

Das Trägheitsmoment ist um einen Faktor 2 größer als beim homogenen Zylinder, weil mehr Masse aussen sitzt, d.h. die kinetische Energie ist beim gleichen Radius und bei der gleichen Gesamtmasse höher.

© Homogene Kugel

Hier bieten sich Kugelkoordinaten an:

$$J = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta r^2 \sin^2 \vartheta$$

$$\stackrel{x = \cos \vartheta}{=} \rho_0 2\pi \int_0^R dr r^4 \int_{-1}^1 dx (1 - x^2)$$

$$= \rho_0 2\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R \cdot \underbrace{\left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1}_{\frac{4}{3}} = \left(\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \right) \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

Wieder ist es der Vorfaktor, der im Detail berechnet werden muß. Hier ist also die Masse effektiv näher an der Drehachse als beim homogenen Zylinder mit dem gleichen Radius.

Für die *raumfeste* Rotation haben wir also $T = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2$ gefunden. Beim rollenden Zylinder ist die Rotation aber *körperfest*, d.h. wir müssen auch die Translation noch berücksichtigen. Ein Teilchen im starren Körper hat eine Geschwindigkeit, die sowohl Translation als auch Rotation beinhaltet:

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v}_T}_{|\mathbf{v}_T| = \dot{x}} + \underbrace{\mathbf{v}_R}_{\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}}$$

mit Relativkoordinate $\bar{\mathbf{r}}$. Für die kinetische Energie folgt also:

$$T = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}^2$$

$$= \frac{\rho_0}{2} \int d\mathbf{r} [\dot{x}^2 + 2\mathbf{v}_T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) + (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}})^2]$$

$$= \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{J}{2} \dot{\vartheta}^2 + \rho_0 \mathbf{v}_T \cdot \underbrace{\int d\mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}})}_{=0}$$

1 Lagrange-Mechanik

Der gemischte Term verschwindet für den Zylinder aus Symmetriegründen: für jeden Punkt um Volumenintegral gibt es einen an der Drehachse gespiegelten, gegenüberliegenden Punkt, der den gleichen Beitrag mit einem negativen Vorzeichen liefert. Damit gibt es genau zwei Beiträge zur kinetischen Energie:

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{x}^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{J}{2}\dot{\vartheta}^2}_{\text{Rotation}}$$

Potentielle Energie:

$$V = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})gz = Mg \underbrace{R_z}_{\text{Schwerpunkt}}$$

$$= -Mgx \sin \varphi + \text{const}$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{J}{2}\dot{\vartheta}^2 + Mgx \sin \varphi$$

Wir haben also eine Lagrange-Funktion gefunden mit $S = 2$, $x = q_1$, $\vartheta = q_2$.
Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = M\ddot{q}_1 - Mg \sin \varphi = \lambda a_{11} = -\lambda \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = J\ddot{q}_2 = \lambda a_{12} = \lambda R \quad (2)$$

$$-\dot{q}_1 + R\dot{q}_2 = 0 \quad (3)$$

3 Gleichungen für 3 Unbekannte q_1, q_2, λ

$$(1) + \frac{(2)}{R} : \quad 0 = M\ddot{q}_1 - Mg \sin \varphi + \frac{J}{R} \underbrace{\ddot{q}_2}_{\frac{\ddot{q}_1}{R} \text{ nach (2)}}$$

Homogener Zylinder: $J = \frac{1}{2}MR^2$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = \frac{2}{3}g \sin \varphi$$

Wie erwartet haben wir eine konstante Beschleunigung wie beim freien Fall. Zum Vergleich: gleitender Zylinder ohne Rotation:

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 - Mgx \sin \varphi \Rightarrow \ddot{x} = g \sin \varphi$$

1 Lagrange-Mechanik

Die Rollbedingung verkleinert also die effektive Beschleunigung um ein Drittel. Wir vergleichen noch mit dem Hohlzylinder:

$$J = MR^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_1 = \frac{1}{2}g \sin \varphi} \quad (1.133)$$

Hier ist die Beschleunigung sogar um die Hälfte reduziert.

Die gleichen Ergebnisse hätten wir auch mit der Lagrange-Gleichung 2. Art für eine holonome Rechnung für die Koordinate q_1 erhalten. Der Vorteil der Lagrange-Gleichungen 1. Art ist jetzt, dass wir auch die Zwangskräfte erhalten:

$$-(1) + \frac{(2)}{R} : \quad \lambda = \frac{1}{2} \left[\overbrace{\frac{J}{R}}^{\frac{1}{2}MR^2} \underbrace{\ddot{q}_2}_{\frac{\ddot{q}_1}{R}} - M \underbrace{\ddot{q}_1}_{\frac{2}{3}g \sin \varphi} + Mg \sin \varphi \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}Mg \sin \varphi}$$

$$Q_1 = \lambda a_{11} = -\frac{1}{3}Mg \sin \varphi \quad \text{Zwangskraft}$$

$$Q_2 = \lambda a_{12} = \frac{1}{3}RMg \sin \varphi \quad \text{Zwangsdrehmoment}$$

Die verallgemeinerten Zwangskraftkomponenten verschwinden also wenn $g = 0$ oder $\varphi = 0$, d.h. wenn keine treibende Kraft existiert. Bei einer Beschleunigung stellen sie sicher, dass die Geschwindigkeiten \dot{x} und $\dot{\vartheta}$ so synchronisiert werden, dass die Rollbedingung gilt.

③ Rollendes Rad in der Ebene

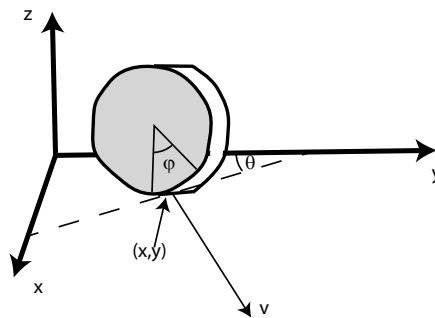


Abbildung 1.39: Das rollende Rad in der Ebene hat $S=4$ verallgemeinerte Koordinaten.

1 Lagrange-Mechanik

Dieses Beispiel wurde schon in der Einleitung erklärt: $S = 4$, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \varphi$, $q_4 = \vartheta$. In diesem Fall sind die differentiellen Zwangsbedingungen wirklich nicht-holonon da sich für die Differentiale

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \vartheta = R\dot{\varphi} \cos \vartheta \\ \dot{y} &= v \sin \vartheta = R\dot{\varphi} \sin \vartheta\end{aligned}$$

kein Integral finden lässt. Wir lesen ab:

$$a_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -R \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 1 & -R \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.134)$$

Die Lagrange-Funktion hat nur kinetische Energie, da der Schwerpunkt des Rads seine Höhe nicht ändert:

$$L = T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{J_2}{2}\dot{\vartheta}^2$$

Es gibt also vier Lagrange-Gleichungen der 1. Art:

$$\Rightarrow M\ddot{x} = \lambda_1 \quad (1)$$

$$M\ddot{y} = \lambda_2 \quad (2)$$

$$J_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R \cos \vartheta - \lambda_2 R \sin \vartheta \quad (3)$$

$$J_2\ddot{\vartheta} = 0 \quad (4)$$

Insgesamt sind das 6 Gleichungen für 6 Unbekannte.

Gleichung (4) kann direkt integriert werden:

$$\boxed{\vartheta = \omega t} \quad (1.135)$$

mit $\omega = \text{const}$. In den Gleichungen (1) und (2) verwenden wir die differentiellen Zwangsbedingungen, nachdem wir sie einmal differenziert haben:

$$\lambda_1 = -MR\omega\dot{\varphi} \sin \omega t + MR\ddot{\varphi} \cos \omega t \quad (1.136)$$

$$\lambda_2 = MR\omega\dot{\varphi} \cos \omega t + MR\ddot{\varphi} \sin \omega t \quad (1.137)$$

Einsetzen in (3):

$$\begin{aligned}J_1\ddot{\varphi} &= MR^2\omega\dot{\varphi} \sin \omega t \cos \omega t - MR^2\ddot{\varphi} \cos^2 \omega t \\ &\quad - MR^2\omega\dot{\varphi} \cos \omega t \sin \omega t - MR^2\ddot{\varphi} \sin^2 \omega t = -MR^2\ddot{\varphi} \\ \Rightarrow \underbrace{J_1}_{>0} \ddot{\varphi} &= \underbrace{-MR^2}_{<0} \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \text{const} = \Omega \Rightarrow \boxed{\varphi = \Omega t}\end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

Damit sind die Zwangsbedingungen vollständig bestimmt:

$$Q_1 = -MR\omega\Omega \sin \omega t$$

$$Q_2 = MR\omega\Omega \cos \omega t$$

$$Q_3 = Q_4 = 0$$

Nur wenn das Rad um seine Hochachse rotiert, sind Zwangskräfte nötig, diese synchronisieren dann die Beschleunigung in x und y so, dass die Rollbedingung erfüllt ist.

Holonom versus nicht-holonom

Die Lagrange-Methode 1. Art funktioniert für differentielle Zwangsbedingungen, insbesondere für holonome Systeme mit $f_i(q_1, \dots, q_s, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq p$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^s \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial q_j}}_{a_{ij}} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial t}}_{b_i} = 0$$

Für holonome Systeme gilt also

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \quad (1.138)$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} \quad (1.139)$$

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Existenz eines Integrals. Bei den obigen Beispielen ist dies für ①,② erfüllt, aber nicht für ③: $\frac{\partial a_{13}}{\partial q_4} = R \sin \vartheta \neq \frac{\partial a_{14}}{\partial q_3} = 0$. Damit ist bewiesen, dass dieser Fall wirklich nicht-holonom ist.

1.9 Starrer Körper

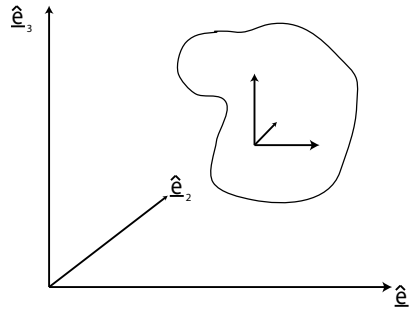


Abbildung 1.40: Im starren Körper sind die Entfernungen zwischen den einzelnen Massenpunkten konstant. Deshalb kann man auch einfach ein körperfestes Bezugssystem definieren.

Ein starrer Körper kann Translationen und Rotationen durchführen. Die Translation erfolgt wie bei einem Massenpunkt, da sie effektiv nur den Schwerpunkt betrifft. Bei der Rotation dagegen treten neue und verblüffende Effekte auf (Kreisel, Bumerang, Erdbewegung, etc). Die Kreiseltheorie ist eine der Höhepunkte der Mechanik, da sie sehr komplizierte Bewegungsmuster auf die wenigen einfachen Grundgesetze der Mechanik zurückführen kann. Hier verwenden wir die Lagrange-Mechanik, um den schweren Kreisel zu analysieren. Für die Kreiselbewegung mit externen Drehmomenten dagegen wäre die Newton-Mechanik besser geeignet.

Wir verwenden zwei Bezugssysteme:

- 1) raumfest: $\hat{\Sigma}, (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$
- 2) körperfest: $\Sigma, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Ein Punkt i im starren Körper besitzt folgende Koordinaten:

$$\hat{\mathbf{r}}_i(t) = \sum_{l=1}^3 \hat{x}_{il}(t) \hat{\mathbf{e}}_l \text{ in } \hat{\Sigma} \quad (1.140)$$

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{l=1}^3 x_{il} \mathbf{e}_l(t) \text{ in } \Sigma \quad (1.141)$$

1 Lagrange-Mechanik

Schwerpunkt \mathbf{R} bewegt sich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) \Rightarrow \hat{\mathbf{r}}_i(t) &= \underbrace{\mathbf{r}_0(t)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\mathbf{r}_i(t)}_{\text{Rotation}} \\ \Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{r}}}_i(t) &= \dot{\mathbf{r}}_0(t) + \underbrace{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_i(t))}_{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Damit folgt für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\hat{\mathbf{r}}}_i^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_0^2}_{\text{Transl.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}_{\text{Spatprodukt } \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{r}}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \text{ Kopplung}}$$

Der Kopplungsterm kann durch geeignete Wahl des Ursprungs von Σ zum Verschwinden gebracht werden:

- 1) **Unterstützter Kreisel:** Der Körper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um einen raumfesten Punkt, der als Ursprung gewählt wird $\Rightarrow \mathbf{r}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$
- 2) **Bewegung ohne raumfesten Punkt:** In diesem Fall wird der Schwerpunkt als Ursprung gewählt $\Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{0}$

Wir betrachten den Rotationsanteil zur kinetischen Energie:

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{[\omega^2 \mathbf{r}_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2]}_{\substack{[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2) \\ - (\omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \omega_3 x_{i3})^2]}} \quad (1.142)$$

da $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Durch Umgruppieren der verschiedenen Terme sieht man, dass man diesen komplizierten Ausdruck schreiben kann als

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\delta_{lm} r_i^2 - x_{il} x_{im})}_{=: J_{lm}} \omega_l \omega_m \quad (1.143)$$

Das neu definierte Objekt heisst *Trägheitstensors* $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$. Ausgeschrieben:

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} x_{i2}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i1}x_{i2} & -x_{i1}x_{i3} \\ -x_{i2}x_{i1} & x_{i1}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i2}x_{i3} \\ -x_{i3}x_{i1} & -x_{i3}x_{i2} & x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \end{pmatrix} \quad (1.144)$$

$\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)$ ist ein Tensor, dessen Eigenschaften unter Drehung garantieren, dass die kinetische Energie $T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 J_{lm} \omega_l \omega_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega}$ invariant

1 Lagrange-Mechanik

unter einer Drehung des Koordinatensystems ist. $\underline{\underline{J}}$ ist symmetrisch ($J_{lm} = J_{ml}$) und hat deshalb sechs unabhängige Koordinaten.

Beziehung zum Trägheitsmoment: $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{l,m=1}^3 J_{lm} n_l n_m \right)}_{J_{\mathbf{n}}} \omega^2 \quad (1.145)$$

Aus dem Trägheitstensor kann also jedes Trägheitsmoment bzgl. einer Drehachse \mathbf{n} berechnet werden.

Trägheitstensor im Kontinuumslimit:

$$J_{lm} = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (r^2 \delta_{lm} - x_l x_m) \quad (1.146)$$

Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist eine symmetrische reelle Matrix. Diese kann diagonalisiert werden durch Rotation des Bezugssystems (*Hauptachsentransformation*):

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (1.147)$$

J_1, J_2, J_3 sind die *Hauptträgheitsmomente* bezüglich der dadurch definierten *Hauptträgheitsachsen*. Ab jetzt wählen wir für Σ das Hauptachsensystem. Die kinetische Energie hat dann die einfache Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 J_l \omega_l^2 \quad (1.148)$$

Da die kinetische Energie im Hauptachsensystem am einfachsten wird, muß man noch dessen Lage im Raum beschreiben. Um ein kartesisches Koordinatensystem $\hat{\Sigma}$ auf ein anderes Σ zu drehen, benötigt man im allgemeinen Fall genau drei Rotationen, die durch die drei *Euler'sche Winkel* beschrieben werden:

1 Lagrange-Mechanik

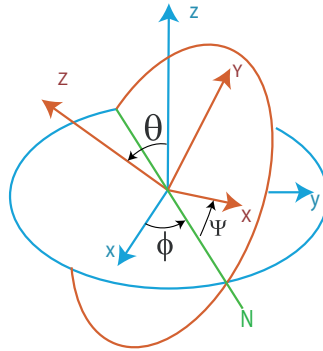


Abbildung 1.41: Definition der drei Euler'schen Winkel

1. Drehung um \hat{e}_3 um Winkel Φ
2. Drehung um \hat{e}'_1 um Winkel Θ
3. Drehung um \hat{e}''_3 um Winkel Ψ

Die 6 unabhängigen Komponenten des Trägheitstensors sind die 3 Hauptträgheitsmomente sowie die 3 Euler'schen Winkel, die die Rotation ins Hauptachsensystem beschreiben.

Wenn ein starrer Körper sich dreht, dann sind seine Euler'schen Winkel zeitabhängig. Dasselbe gilt für die Winkelgeschwindigkeit. Deshalb gibt es zwischen ihnen einen eindeutigen Zusammenhang (Herleitung mit Rotationsmatrizen):

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi \\ \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi - \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (1.149)$$

Damit wird die kinetische Energie eine Funktion der Eulerschen Winkel:

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \underline{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 J_l \omega_l^2 = T_R(\Phi, \Theta, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}) \quad (1.150)$$

Die Euler'schen Winkel (Φ, Θ, Ψ) können also als generalisierte Koordinaten verwendet werden.

Der schwere Kreisel

Einen Kinderkreisel, der durch Reibung schon etwas Energie verloren hat und schief steht, nennt man schweren Kreisel, weil jetzt kinetische und potentielle Energie wichtig sind (andernfalls spricht man vom schnellen Kreisel). Wir betrachten

1 Lagrange-Mechanik

einen symmetrischen Kreisel ($J_1 = J_2$) im Schwerfeld und wenden den Lagrange-Formalismus auf die Euler'schen Winkel an. Als körperfestes Bezugssystem wird das Hauptachsensystem am Unterstützungspunkt gewählt.

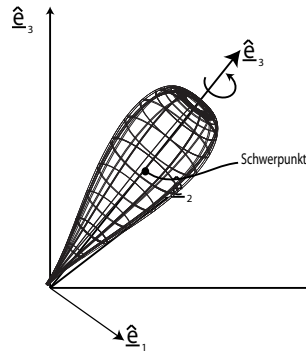


Abbildung 1.42: Der schwere Kreisel ist der typische symmetrische Kinderkreisel.

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2$$

$$= \boxed{\frac{J_1}{2}(\dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{J_3}{2}(\dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi})^2}$$

Potentielle Energie:

$$\boxed{V = mgs \cos \Theta}$$

wobei s die Entfernung zwischen Unterstützungspunkt und Schwerpunkt ist.

Lagrange-Gleichung:

$$L = T - V = L(\Phi, \Theta, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi})$$

Das ergibt also 3 ODEs 2. Ordnung. Allerdings hat die Lagrange-Funktion drei Symmetrien und somit drei Erhaltungsgrößen:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + V = \text{const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \text{const} = L_z \text{ Drehimpulskomponente in z-Richtung}$$

$$= J_1 \dot{\Phi} \sin^2 \Theta + J_3(\dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta) \cos \Theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0 \Rightarrow p_\Psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = \text{const} = L_3 \text{ Drehimpulskomponente in Kreiselrichtung}$$

$$= J_3(\dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta)$$

1 Lagrange-Mechanik

Man erhält also drei ODEs 1. Ordnung. Wir eliminieren $\dot{\Phi}$ und $\dot{\Psi}$ mit L_z und L_3 in E:

$$E = \frac{J_1}{2} \dot{\Theta}^2 + \underbrace{\frac{(L_z - L_3 \cos \Theta)^2}{2J_1 \sin^2 \Theta} + \frac{L_3^2}{2J_3} + mgs \cos \Theta}_{\text{effektives Potential } U_{\text{eff}}(\Theta)} \quad (1.151)$$

Effektiv handelt es sich also hierbei um ein Ein-Teilchen-Problem mit den Parametern m, s, J_1, J_3 und den Integrationskonstanten E, L_z, L_3 . Es gibt keine einfache analytische Lösung, weil U_{eff} dafür zu kompliziert ist. Jedoch besitzt $U_{\text{eff}}(\Theta)$ immer dieselbe Form:

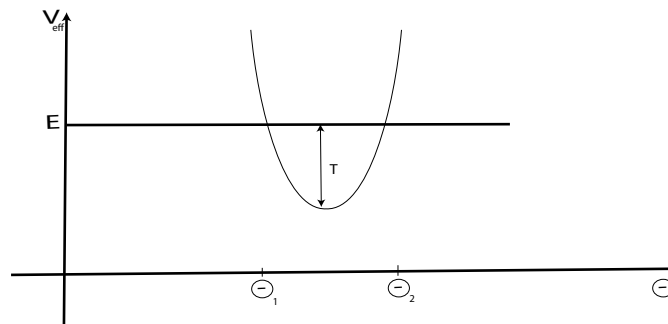


Abbildung 1.43: Typische Form des effektiven Potentials im Kippwinkel

Nur der Bereich unterhalb der horizontalen Linie ist erlaubt, weil sonst die kinetische Energie negativ wird. An den Schnittpunkten dreht die Winkelkoordinate also gerade um. Es kommt somit zu einer Oszillation in Θ , dadurch wippt der Kreisel auf und ab. Dies wird auch *Nutation* genannt.

Aus den zwei anderen Erhaltungsgrößen lässt sich folgendes berechnen:

$$L_z - L_3 \cos \Theta = J_1 \dot{\Phi} \sin^2 \Theta \Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \Theta}{J_1 \sin^2 \Theta}$$

Bei konstantem Θ dreht sich der Kreisel mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Phi}$ um die z -Achse. Dies wird auch *Präzession* genannt. $\dot{\Phi}$ hängt allerdings von Θ ab und kann deshalb sogar sein Vorzeichen wechseln. Es ergeben sich für oben genannte Parameter und Integrationskonstanten verschiedene mögliche Bewegungsmuster:

1 Lagrange-Mechanik

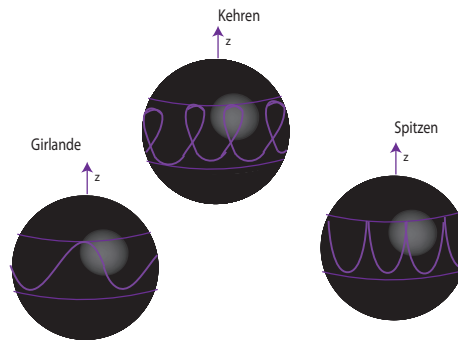


Abbildung 1.44: Verschiedene Bewegungsmuster für den schweren Kreisel

Unser Planet Erde ist kein unterstützter Kreisel, aber ein nicht-unterstützter symmetrischer Kugelkreisel, der ähnliche Bewegungsformen durchläuft, die wir an der Bewegung des Fixsternhimmels ablesen können. Für Nutation und Präzession hat die Erde Perioden von 300 Tagen (bereits 1765 von Euler vorhergesagt) und 25.800 Jahren. Um die Kreiselbewegung der Erde im Detail zu verstehen, muß man außerdem viele andere Faktoren in Betracht ziehen, insbesondere die äußeren Kräfte von Sonne und Mond, Verformungen der Erde, Gezeitenkräfte und das periodische Abschmelzen der Polkappen.

2 Hamilton-Mechanik

Die meisten Standardanwendungen der Mechanik werden in der Newtonschen oder Lagrangeschen Mechanik behandelt. Die Hamiltonsche Mechanik kommt für fortgeschrittene Anwendungen zum Einsatz, z.B. für Störungstheorie in der Himmelsmechanik. Da die Hamiltonsche Mechanik die formale Grundstruktur der Mechanik herausarbeitet, hat sie sich als geeigneter Ausgangspunkt für die Theoriebildung in anderen Bereichen der Physik erwiesen:

- Ⓐ Quantenmechanik: die Bewegungsgleichung der Wellenmechanik, die Schrödinger-Gleichung, wird aus der Hamilton-Funktion konstruiert. Die Bewegungsgleichung der Matrizenmechanik wird mit dem Klammerformalismus formuliert, der in der Hamilton-Mechanik eingeführt wird.
- Ⓑ Statistische Mechanik: es wird über mikroskopische Zustände mit einem Gewicht gemittelt, das sich aus den dynamischen Eigenschaften Hamiltonscher Systeme ergibt.
- Ⓒ Dynamische Systeme: Studium der Bewegungsformen im sogenannten *Phasenraum*, einem zentralen Begriff der Hamiltonschen Mechanik. Die Erweiterung auf Nicht-Hamiltonsche Systeme wie Strömungsmechanik oder Populationsdynamik führt auf interessante neue Erkenntnisse, wie z.B. auf die Chaos-Theorie.

Eine Kenntnis der Grundkonzepte der Hamiltonschen Mechanik ist also für das Verständnis der nicht-klassischen Physik (Quantenmechanik, Statistische Mechanik) sehr wichtig. Wir beschreiben hier die Grundzüge der Hamiltonschen Mechanik. Forminvarianz der kanonischen Gleichungen, kanonische Transformationen und die Hamilton-Jakobi-Theorie werden aus Zeitgründen nicht behandelt.

2.1 Hamilton-Funktion

Grundidee:

Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_j werden durch die verallgemeinerten Impulse p_j ersetzt:

$$p_j = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \dot{q}_k = \dot{q}_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (2.1)$$

Die *Hamilton-Funktion* ist dann wie folgt definiert:

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) p_j - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \quad (2.2)$$

Die genaue Verkettung der Abhängigkeiten ist wichtig, wenn man nach den fundamentalen Variablen ableitet.

Beispiele

① Teilchen im Potential

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V \Rightarrow p_x = m \dot{x} \Rightarrow H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V$$

② Mathematisches Pendel

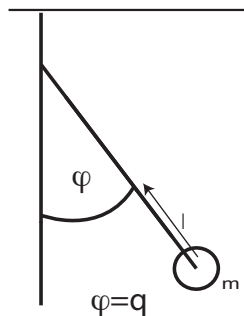


Abbildung 2.1: Mathematisches Pendel: die verallgemeinerte Koordinate ist ein Winkel, deshalb hat der Impulsterm nicht die übliche Form.

2 Hamilton-Mechanik

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q$$

$$p = ml^2 \dot{q} \Rightarrow H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{ml^2} - \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q}$$

③ Teilchen in Kugelkoordinaten

$$\left. \begin{array}{l} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{array} \right\} \Rightarrow T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)$$

$$\Rightarrow p_r = m\dot{r}, p_{\vartheta} = mr^2\dot{\vartheta}, p_{\varphi} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_{\vartheta}^2}{r^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi)}$$

④ Teilchen im elektromagnetischen Feld

verallgemeinertes Potential für Lorentz-Kraft: $U = q(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A})$

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A} - q\varphi$$

$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}$ verallgemeinerter Impuls

$$H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} - \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - q\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A} + q\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi}$$

2.2 Bewegungsgleichungen

Betrachte partielle Ableitungen von $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)p_j - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} p_j - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Lagrange-Gl. $\underbrace{-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} = -\dot{p}_k$ (2.3)

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} p_j + \dot{q}_k - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$
(2.4)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} p_j - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
(2.5)

Da die fundamentalen Variablen q_j , p_j und t jeweils an drei Stellen in H vorkommen, muß man erst einmal drei partielle Ableitungen nach den drei Argumenten der jeweiligen Funktionen bilden, unabhängig davon, ob man hinterher partiell oder total ableiten will. Dann erst erfolgt die eigentlich gewünschte partielle Ableitung, für die wie für jede Ableitung die Kettenregel gilt. Nach Konstruktion heben sich jeweils zwei der drei Terme auf. Damit folgen die *Hamiltonsche oder kanonische Gleichungen*:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_k}, \dot{p}_k = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_k}$$

(2.6)

Das sind 2S ODEs 1. Ordnung. Zum Vergleich: die äquivalenten Lagrange-Gleichungen sind S ODEs 2. Ordnung, beides Mal werden 2S Anfangsbedingungen benötigt. Die kanonischen Gleichungen zeigen ein hohes Maß an Symmetrie zwischen \mathbf{q} und \mathbf{p} (nur das Minuszeichen stört die Harmonie etwas, seine Position muß man sich einfach merken). Sie beschreiben die Bewegung im 2S-dimensionalen (\mathbf{q}, \mathbf{p}) -Raum, dem sogenannten *Phasenraum*.

2.3 Phasenraum

Wir diskutieren den Phasenraum am Beispiel des 1D harmonischen Oszillators:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\underbrace{m\omega_0^2}_{=k}q^2$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2}$$

Der Phasenraum (q, p) ist zwei-dimensional, also eine *Phasenebene*.
Kanonische Gleichungen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (2.7)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2q \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega_0^2q \quad (2.9)$$

Die kanonischen Gleichungen entsprechen also genau der Newtonschen Gleichung für den harmonischen Oszillator. Sie sind aber besser dafür geeignet, die Bewegung auf geometrische Art und Weise zu untersuchen, da sie den Fluß im Phasenraum beschreiben. Ein Plot in der Phasenebene ergibt eine geschlossene Kurve, daran sieht man, dass es sich um eine Oszillation handelt.

Energieerhaltung (Noether-Theorem):

$$H = H(q, p) = E = \text{const}$$

Die Bewegung ist also eingeschränkt auf eine Kurve im Phasenraum.

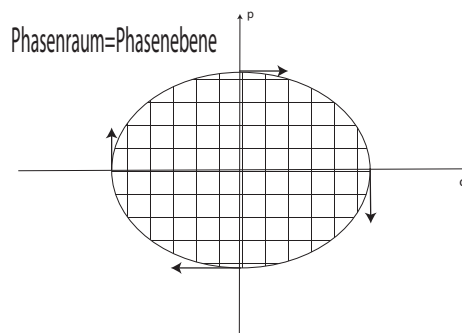


Abbildung 2.2: Beim harmonischen Oszillator bewegt sich das System im Phasenraum auf einer Ellipse.

2 Hamilton-Mechanik

Nach Division der Hamilton-Funktion durch E bekommt man eine Ellipsengleichung:

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{1}{m\omega_0^2}E} \quad (2.10)$$

mit Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}, b = \sqrt{2mE}$$

Der harmonische Oszillator bewegt sich also im Phasenraum auf einer Ellipse. In der Quantenmechanik und Statistischen Mechanik spielt das Phasenraumvolumen V_{PR} eine zentrale Rolle. Wie viele Zustände gibt es mit Maximalenergie E ? Beim harmonischen Oszillator entspricht das genau dem Flächeninhalt der Ellipse:

$$V_{PR} = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega_0} \quad (2.11)$$

In der Quantenmechanik gibt es diskrete Zustände. Wir nehmen an, dass der Phasenraum in endliche Pakete mit Volumina $\Delta q \Delta p = h$ aufgeteilt wird, wobei h die Dimension einer Wirkung hat, $[h] = \text{mkgm/s} = \text{mNs} = \text{Js}$. Wieviele Zustände gibt es dann mit Maximalenergie E ?

$$N = \frac{V_{PR}}{h} = \frac{2\pi E}{h\omega_0} = \boxed{\frac{E}{\hbar\omega_0}} = N \quad (2.12)$$

wobei $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ eine Naturkonstante ist (*Plancksches Wirkungsquantum*) und $\frac{h}{2\pi} = \hbar = h \text{ quer}$ eine geschickte Abkürzung.

Der Phasenraum ist auch ein zentraler Begriff für die Statistische Mechanik. Hier wird der *Satz von Liouville* wichtig: wenn man ein bestimmtes Gebiet im Phasenraum eines Hamiltonschen Systems betrachtet, dann bleibt dessen Phasenraumvolumen unter der zeitlichen Entwicklung konstant. Der Beweis erfolgt mit den Eigenschaften von Volumenintegralen (Jacobi-Determinante, Taylor-Reihe, kanonische Gleichungen). Obwohl das *Volumen* konstant ist, kann aber die *Form* eines Phasenraumgebiets im Laufe der Zeit so kompliziert werden, dass es jedem Punkt im Phasenraum beliebig nahe kommt.

2.4 Poisson-Klammer

In der Hamilton-Mechanik ist alles eine Funktion von $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \Rightarrow$ physikalische Observable $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ (z.B. Energie, Schwerpunkt, Impuls, Drehimpuls, etc.)

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \underbrace{\dot{q}_j}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \underbrace{\dot{p}_j}_{-\frac{\partial H}{\partial q_j}} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.13)$$

Wir definieren die *Poisson-Klammer von F mit G*:

$$\{F, G\} := \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}} \quad (2.15)$$

Damit folgt: wenn eine Observable nicht explizit von der Zeit abhängt ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$), dann ist F eine Erhaltungsgröße, wenn seine Poisson-Klammer mit H verschwindet. Von der Definition folgt direkt: $\{F, G\} = -\{G, F\}$, $\{F, F\} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_0 + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.16)$$

H ist also eine Erhaltungsgröße, wenn $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dieses Ergebnis hatten wir auch schon aus dem Noether-Theorem erhalten.

Die Zeitentwicklung von q_j und p_j entspricht den kanonischen Gleichungen (partielle Ableitungen nach der Zeit gibt es nicht, da dies fundamentale Variablen sind):

$$\boxed{\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \dot{p}_j = \{p_j, H\}} \quad (2.17)$$

Mit Hilfe der Poisson-Klammer werden die kanonischen Gleichungen also vollständig symmetrisch in verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen.

Die Poisson-Klammer kann als Differentialoperator betrachtet werden:

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) G =: D_F G \quad (2.18)$$

Daraus sieht man sofort, dass die Poisson-Klammer linear in G ist, einer Produktregel in G genügt und für $G = const$ verschwindet.

2 Hamilton-Mechanik

Im Hamilton-Formalismus sind q_j , p_j und t die unabhängigen Variablen. Daraus ergeben sich die *fundamentalen Poisson-Klammern*:

$$\{q_k, q_l\} = \sum_{j=1}^S \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial q_l}{\partial p_j}}_0 - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_0 \underbrace{\frac{\partial q_l}{\partial q_j}}_{\delta_{lj}} \right) = 0 \quad (2.19)$$

$$\{p_k, p_l\} = \dots = 0 \quad (2.20)$$

$$\{q_k, p_l\} = \sum_{j=1}^S \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_j}}_{\delta_{lj}} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_0 \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_j}}_0 \right) = \delta_{kl} \quad (2.21)$$

$$\{p_k, q_l\} = -\{q_l, p_k\} = -\delta_{kl} \quad (2.22)$$

In der Quantenmechanik taucht eine Klammer $[A, B]$ auf (*Kommutator*), die die gleichen formalen Eigenschaften hat wie die Poisson-Klammer \Rightarrow Hamilton-Mechanik und Quanten-Mechanik haben die gleiche formale Struktur. Dies motiviert den Aufbau eines Axiomen-Systems für eine abstrakte Klammeroperation (alle 5 Axiome können für die Poisson-Klammer direkt nachgeprüft werden):

- 1) Antisymmetrie: $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- 2) Linearität: $\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$
- 3) Nullelement: $\{F, c\} = 0$
- 4) Produktregel: $\{F, GK\} = G\{F, K\} + \{F, G\}K$
- 5) Jacobi-Identität: $\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0$ (zyklische Vertauschung)

Mit dem Klammer-Formalismus können viele Probleme algebraisch gelöst werden, ohne auf die Details Bezug nehmen zu müssen.

Beispiel:

Harmonischer Oszillator

2 Hamilton-Mechanik

$$\begin{aligned}H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 \\ \Rightarrow \dot{p} &= \{p, H\} = \frac{1}{2m}\{p, p^2\} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\{p, q^2\} \\ &= \frac{1}{2m}\left[p \underbrace{\{p, p\}}_{=0} + \underbrace{\{p, p\}}_{=0} p\right] + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left[q \underbrace{\{p, q\}}_{=-1} + \underbrace{\{p, q\}}_{=-1} q\right] \\ \Rightarrow \dot{p} &= -m\omega_0^2 q \\ \text{Analog: } \dot{q} &= \{q, H\} = \dots = \frac{p}{m}\end{aligned}$$

Damit haben wir die kanonischen Gleichungen für den harmonischen Oszillator rein algebraisch und ohne Bezug auf die klassische Definition der Poisson-Klammer hergeleitet. Die gleichen Bewegungsgleichungen gelten deshalb in der Quantenmechanik, nur dass q und p hier anders interpretiert werden.